ÉLÉMENTS

DE

MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

(MÉCANIQUE)

A LA MÊME LIBRAIRIE

OUVRAGES DE M. VOGT

Éléments de Mathématiques supérieures : *Algèbre, Analyse, Géométrie analytique* (Cours de Mathématiques générales), à l'usage des physiciens, chimistes, ingénieurs et des élèves des Facultés des Sciences. — Fort vol. 25/16^{cm}, avec figures, de 816 pages, 13e édition. . . . . . . **60** fr. »

Solutions des Exercices proposés dans les *Éléments de Mathématiques supérieures*. — Vol. 25/16^{cm}, avec figures, de 397 pages, 4e édition. . **32** fr. »

ÉLÉMENTS

DE

MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

(MÉCANIQUE)

A L'USAGE DES

CANDIDATS AU CERTIFICAT DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

ET DES INGÉNIEURS

PAR

Henri VOGT

ANCIEN DIRECTEUR DE L'INSTITUT D'ÉLECTROTECHNIQUE ET DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE
DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY

RECUEILLIS ET COMPLÉTÉS

PAR

Paul MENTRÉ

ANCIEN DIRECTEUR DE L'INSTITUT ÉLECTROMÉCANIQUE
DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE STAMBOUL
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY

PARIS

LIBRAIRIE VUIBERT

BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

1931

AVERTISSEMENT

Quand mon cher maître et ami Vogt a été frappé par la mort, il laissait ce livre inachevé.

Le succès de ses *Éléments de Mathématiques supérieures* (Algèbre, Calcul différentiel et intégral, Géométrie analytique) l'avait encouragé à entreprendre cet ouvrage, qui est le complément de l'autre. Il avait déjà rédigé au net ou au brouillon la plupart des chapitres.

J'ai jugé utile de terminer par un appendice où sont rassemblées les propositions et les formules principales.

Paul MENTRÉ.

INTRODUCTION

La mécanique rationnelle a pour objet l'étude des phénomènes de mouvement et d'équilibre des solides, des liquides et des gaz.

Elle fait intervenir les notions d'espace, de temps et de masse. La notion d'espace permet d'étudier les changements de position ou de forme, mais sans faire intervenir la durée de ces changements ; elle utilise une seule unité, celle des longueurs, par exemple le mètre ou le centimètre.

La deuxième notion permet d'étudier la durée des changements observés, de comparer les durées d'événements simultanés ou successifs ; elle utilise une unité reliée à la durée d'un phénomène que nous jugeons susceptible de se reproduire périodiquement, comme le jour sidéral ou l'oscillation d'un pendule ; l'unité habituelle de temps est la seconde sexagésimale de temps moyen. La troisième notion est inhérente à la matière et a une influence sur les phénomènes de mouvement ; la balance permet de comparer des masses. On appelle corps homogènes ceux pour lesquels des volumes égaux renferment des masses égales ; l'unité de masse est celle d'un certain échantillon de métal conservé aux Archives ; le kilogramme-masse est très sensiblement égal à la masse de l'eau contenue dans un décimètre cube.

Les causes réelles des mouvements ou de leurs modifications nous sont difficilement connues, et elles sont plutôt étudiées en Physique. En Mécanique, on substitue aux causes réelles des causes fictives appelées forces, capables de produire les mêmes effets, et l'on n'introduit dans les raisonnements que les propriétés communes à toutes les forces. Les relations qui existent entre les forces et les déplacements sont basées sur des postulats qui sont non des vérités nécessaires, mais le résultat de longues séries d'expériences ; on estime que les conséquences tirées de ces postulats permettent de prévoir avec une approximation suffisante les phénomènes qui se produisent dans des circonstances déterminées.

On peut diviser la Mécanique en plusieurs parties : 1° la *Cinématique,*

étude des relations qui existent entre les déplacements et leurs durées ; elle ne fait intervenir que les notions d'espace et de temps ; 2° la *Dynamique,* étude des relations qui existent entre les déplacements et les forces ; 3° la *Statique,* étude des conditions de l'équilibre ; c'est un cas particulier de la Dynamique ; elle peut être édifiée, à l'aide de postulats simples. sur la seule notion de force (c'est ainsi qu'on opère dans les cours de Mathématiques élémentaires), mais nous l'étudierons comme un cas particulier de la Dynamique.

En ce qui concerne la constitution des corps étudiés en Mécanique on envisage comme cas simple celui d'un corps de dimensions assez petites pour qu'on puisse sans erreur sensible l'assimiler à un simple point géométrique ; on l'appelle *point matériel* et l'on attribue à ce point une masse égale à celle du corps. On suppose que l'étude du mouvement d'un tel corps se réduit à celle du mouvement du point géométrique envisagé et qu'on peut négliger ses mouvements autour de ce point.

Les autres corps envisagés en Mécanique sont considérés généralement comme des ensembles de points matériels ; on distingue les corps dont tous les points restent à des distances invariables les uns des autres, appelés *systèmes invariables,* et les autres qui sont déformables. Pour les fluides, les fils flexibles, la déformation est importante ; pour les solides naturels, les déformations sont assez petites pour être négligeables ; nous traiterons les corps solides comme invariables.

Nous étudierons successivement la cinématique du point, une partie de la cinématique des systèmes invariables, la dynamique du point matériel, une partie de la dynamique des systèmes, et la statique. Plusieurs grandeurs, comme les vitesses, les forces, sont représentées par des vecteurs ; nous ferons dans un chapitre préliminaire l'étude générale des vecteurs.

ELEMENTS

DE

MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

(MÉCANIQUE)

CHAPITRE I

THÉORIE DES VECTEURS

1. Vecteurs. — Les grandeurs que l'on envisage habituellement en mécanique et en physique sont de deux espèces : les unes, comme la masse, la température, l'énergie, n'impliquent aucune idée de direction : on les appelle grandeurs *scalaires* ; les autres, comme la force, la vitesse, ont une direction déterminée. Pour la facilité de leur étude, on représente ces dernières par des vecteurs et on les appelle grandeurs *vectorielles*.

Un vecteur (*fig.* 1) est une portion de droite affectée d'un sens ; il a une origine A et une extrémité B ; la droite indéfinie qui contient A et B s'appelle le *support*, et le sens qui va de l'origine à l'extrémité s'appelle le *sens* du vecteur ; on a l'habitude de placer une flèche à l'extrémité B. On représente le vecteur par $\overrightarrow{AB}$ ou, d'une manière générale, par $\overrightarrow{V}$; la mesure de la longueur du vecteur est désignée par AB ou par V. Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est déterminé par son origine, son support, son sens et sa longueur, ou bien encore par son origine, son support, un sens positif des segments géométriques sur ce support ou sur une droite qui lui est parallèle, et la valeur algébrique positive ou négative du segment AB, valeur que l'on désigne par (AB). Dans ce dernier cas, des vecteurs égaux, parallèles et de sens opposés, tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$, ont des valeurs algébriques opposées et l'on a $(A'B') = -(AB)$; en particulier on a $(BA) = -(AB)$.

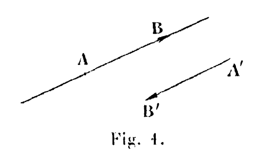


Fig. 1.

Enfin on détermine encore analytiquement un vecteur en donnant les

coordonnées de son origine et celles de son extrémité, ou bien les coordonnées (x, y, z) de son origine et ses projections (X, Y, Z) sur les trois axes.

Deux vecteurs parallèles, de même sens et de même longueur, sont dits *équipollents*.

En mécanique, on est amené à distinguer trois espèces de grandeurs vectorielles.

Les premières, comme les vitesses, sont affectées à des points déterminés ; on représente chacune d'elles par un vecteur appliqué à un point et ayant ce point comme origine ; on dit que chaque vecteur est *lié* à son point d'application. On appelle *champ de vecteurs*, une portion finie ou infinie de l'espace dont chaque point peut être pris comme origine d'un vecteur lié à ce point ; les projections X, Y, Z du vecteur sont des fonctions déterminées des coordonnées x, y, z de son origine.

Les grandeurs de deuxième espèce, comme les forces appliquées à un corps solide, les vitesses angulaires de rotation, sont affectées à des droites déterminées, sans avoir sur ces droites un point d'application particulier. Une grandeur de cette espèce est représentée par un vecteur ayant un support, un sens et une longueur donnés ; mais l'origine du vecteur est indéterminée sur son support et il peut glisser sur lui ; on dit que c'est un vecteur *glissant*.

Enfin les grandeurs de la troisième espèce, comme les axes de couples, ont des directions et des grandeurs déterminées, mais sont susceptibles d'être transportées parallèlement à elles-mêmes en des points quelconques de l'espace. Une grandeur de cette espèce est représentée par un vecteur ayant une direction et une longueur données, mais pouvant être remplacé par tout vecteur équipollent ; ce vecteur est caractérisé par ses projections X, Y, Z ; on dit que c'est un vecteur *libre*.

La théorie des vecteurs est faite au moyen de la géométrie pure dans les cours de Mathématiques élémentaires.

Nous allons reprendre cette théorie par le calcul. Nous obtiendrons des théorèmes déjà connus. Mais les démonstrations analytiques prépareront le lecteur à traiter par le calcul des problèmes sur les vecteurs.

2. Moment d'un vecteur par rapport à un point. — La notion de moment se présente naturellement dans l'étude d'un levier mobile autour d'un point O. Si ce levier est soumis (*fig.* 2) à une force $\vec{F}$, le segment perpendiculaire OH est appelé bras de levier ; on nomme moment de $\vec{F}$ par rapport à O le produit de la valeur de cette force par son bras de levier.

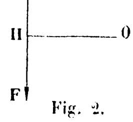


Fig. 2.

Lorsque l'on considère plusieurs forces situées dans le même plan avec le point O, on est amené à envisager une valeur algébrique

du moment de chacune d'elles, et on donne à ce moment le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que la force tend à faire tourner son bras de levier dans un sens choisi comme sens positif ou dans le sens opposé.

Enfin, dans le cas de forces quelconques et dans l'étude des vecteurs, on donne du moment une définition vectorielle qui comprend les précédentes et que nous allons exposer. Elle repose sur une convention relative aux sens de rotation autour d'un axe ou, ce qui revient au même, aux sens des trièdres.

Étant donné un trièdre $Oxyz$ (*fig.* 3) dont les faces sont inférieures à deux droits, et, sauf indications contraires, égales à un droit, on appelle sens positif de rotation celui que voit un observateur placé sur Oz, les pieds en O, la tête en z, lorsqu'une demi-droite d'abord confondue avec Ox vient s'appliquer sur Oy en décrivant dans le plan xOy un angle inférieur à deux droits ; c'est aussi celui que voit un observateur placé sur Ox lorsqu'une demi-droite se déplace de Oy vers Oz et celui que voit un observateur placé sur Oy lorsqu'une demi-droite se déplace de Oz vers Ox. Dans la figure $3a$, ce sens est inverse de celui des aiguilles d'une montre ; dans la figure $3b$, c'est le sens opposé au précédent : chaque trièdre a ainsi un sens caractéristique. Nous supposerons désormais que c'est le sens opposé à celui des aiguilles d'une montre et que les trièdres sont analogues à celui de la figure $3a$; mais cette hypothèse n'est pas indispensable ; les raisonnements et les formules auxquels nous serons conduits sont les mêmes dans les deux hypothèses.

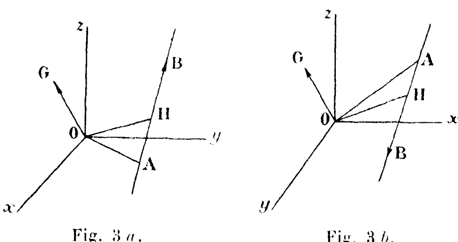


Fig. 3 *a*. Fig. 3 *b*.

On appelle moment d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ *par rapport à un point* O *un autre vecteur* $\overrightarrow{OG}$ *ayant le point* O *pour origine, pour grandeur le produit de* AB *par la longueur de la perpendiculaire* OH *abaissée de* O *sur le support de* AB, *perpendiculaire que l'on appelle encore bras de levier du vecteur, ayant de plus pour support la perpendiculaire menée par* O *au plan* OAB, *et enfin un sens tel que pour l'observateur placé sur* OG *le vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *semble faire tourner son bras de levier dans le sens positif.* Remarquons que le trièdre d'arêtes respectivement parallèles à OH, AB, OG a le même sens que le trièdre des coordonnées.

Nous nous placerons d'abord dans le cas où le point O par rapport auquel on prend les moments est l'origine des coordonnées, et nous calculerons les

projections L, M, N sur les axes Ox, Oy, Oz du vecteur moment $\overrightarrow{OG}$; nous désignerons par ρ la longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$, dont les projections sont X, Y, Z ; par p la longueur de son bras de levier OH, par x, y, z les coordonnées de A, par x_1, y_1, z_1 celles de H, par α_1, β_1, γ_1 ; α_2, β_2, γ_2 ; α_3, β_3, γ_3 les cosinus directeurs de OH, AB, OG ; nous avons

$$\begin{aligned} x_1 &= p\alpha_1, & y_1 &= p\beta_1, & z_1 &= p\gamma_1 ; \\ X &= \rho\alpha_2, & Y &= \rho\beta_2, & Z &= \rho\gamma_2 ; \\ L &= p\rho\alpha_3, & M &= p\rho\beta_3, & N &= p\rho\gamma_3 ; \end{aligned}$$

on démontre en géométrie analytique que l'on a

$$\alpha_3 = \beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2, \qquad \beta_3 = \gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2, \qquad \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 ;$$

en remplaçant α_3, β_3, γ_3 par ces valeurs, nous obtenons

$$\begin{aligned} L &= p\beta_1\rho\gamma_2 - p\gamma_1\rho\beta_2 = y_1 Z - z_1 Y, \\ M &= p\gamma_1\rho\alpha_2 - p\alpha_1\rho\gamma_2 = z_1 X - x_1 Z, \\ N &= p\alpha_1\rho\beta_2 - p\beta_1\rho\alpha_2 = x_1 Y - y_1 X ; \end{aligned}$$

mais si nous remarquons que $\overrightarrow{OH}$ est la résultante du contour OAH, le théorème des projections nous donne

$$x_1 = x + (AH)\alpha_2 = x + \frac{(AH)}{\rho}X, \qquad y_1 = y + \frac{(AH)}{\rho}Y, \qquad z_1 = z + \frac{(AH)}{\rho}Z ;$$

et en remplacant x_1, y_1, z_1 par ces valeurs nous trouvons les formules cherchées :

$$(1) \qquad L = yZ - zY, \qquad M = zX - xZ, \qquad N = xY - yX.$$

Supposons maintenant que l'on prenne le moment du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport à un point quelconque O′ de coordonnées x_0, y_0, z_0 et que l'on cherche les projections L′, M′, N′ du vecteur moment $\overrightarrow{O'G'}$; il suffit de répéter le raisonnement précédent en remplaçant $p\alpha_1$, $p\beta_1$, $p\gamma_1$ par $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$, $z_1 - z_0$; nous obtiendrons ainsi

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} L' &= (y - y_0)Z - (z - z_0)Y = L - (y_0 Z - z_0 Y), \\ M' &= (z - z_0)X - (x - x_0)Z = M - (z_0 X - x_0 Z), \\ N' &= (x - x_0)Y - (y - y_0)X = N - (x_0 Y - y_0 X) ; \end{aligned} \right.$$

nous serions d'ailleurs arrivés au même résultat en faisant une transformation de coordonnées et transportant les axes parallèlement à eux-mêmes de O en O′.

Remarque I. — Il résulte de la définition que le moment d'un vecteur par rapport à un point ne change pas quand on fait glisser le vecteur sur son support ; le moment est donc une grandeur caractéristique d'un vecteur glissant, mais il est lui-même un vecteur lié au point O.

Remarque II. — Il résulte des équations (1) et (2) que les projections

d'un vecteur et celles de son moment sont liées par les identités

$$(3) \qquad LX + MY + NZ = 0, \qquad Z'X + M'Y + N'Z = 0\ ;$$

ces identités sont du reste la traduction de la propriété du moment vectoriel d'être normal au vecteur donné.

3. Moment d'un vecteur par rapport à un axe. — On appelle moment d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport à un axe D la projection sur cet axe du moment de $\overrightarrow{AB}$ par rapport à un point C de l'axe D.

Nous allons montrer que ce moment est indépendant du point C choisi sur D ; nous ferons le calcul en choisissant D pour axe Oz du trièdre des coordonnées (*fig.* 4). Nous désignerons par $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, z_0 les coordonnées du point C. Les projections L', M', N' du moment $\overrightarrow{CG'}$ de $\overrightarrow{AB}$ par rapport à C sont données par les formules (2) ; en particulier la projection N' sur Oz se réduit dans le cas actuel à $xY - yX$ puisque x_0 et y_0 sont nuls, et elle est indépendante de z_0, ce qui démontre la proposition.

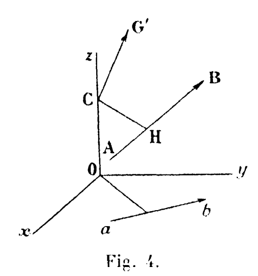


Fig. 4.

Nous voyons, en particulier, que les moments d'un vecteur par rapport aux trois axes de coordonnées sont les projections L, M, N sur ces axes du moment de ce vecteur par rapport à l'origine.

Si l'on projette le vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivant $\overrightarrow{ab}$ sur le plan xOy, le moment de $\overrightarrow{ab}$ par rapport au point O est égal à $xY - yX$ et est identique au moment de $\overrightarrow{AB}$ par rapport à Oz ; cela montre que le moment d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport à un axe D est égal au moment, par rapport à un point O de cet axe, de la projection $\overrightarrow{ab}$ du vecteur sur un plan passant par O et perpendiculaire à D.

On appelle *moment relatif* de deux vecteurs le produit de la longueur de l'un d'eux par le moment de l'autre par rapport à l'axe qui porte le premier.

Soient ρ_0 la valeur algébrique du premier vecteur situé sur un axe D_0 et α_0, β_0, γ_0 les cosinus directeurs de D_0 ; soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées de l'origine de ce vecteur, X_0, Y_0, Z_0 ses projections, L_0, M_0, N_0 celles de son moment par rapport à O ; soient x, y, z, X, Y, Z, L, M, N les quantités analogues relatives au deuxième vecteur. Si L', M', N' sont les projections sur les axes du moment de ce deuxième vecteur par rapport à x_0, y_0, z_0, la projection de ce moment sur D_0, c'est-à-dire le moment du deuxième vecteur par rapport à l'axe D_0, est égale à la somme des projections des trois composantes L', M', N' et a donc pour valeur

$$L'\alpha_0 + M'\beta_0 + N'\gamma_0\ ;$$

en multipliant cette valeur par ρ_0, on aura le moment relatif des deux vec-

teurs, égal à

$$\rho_0(L'\alpha_0 + M'\beta_0 + N'\gamma_0) = L'X_0 + M'Y_0 + N'Z_0 ;$$

en remplaçant L', M', N' par leurs valeurs (2), nous obtenons l'expression symétrique suivante :

$$LX_0 + MY_0 + NZ_0 + L_0X + M_0Y + N_0Z.$$

Il est facile de voir que le moment relatif de deux vecteurs est égal à six fois le volume relatif du tétraèdre ABA'B' ayant pour sommets les origines et les extrémités de ces deux vecteurs.

4. Somme géométrique ou résultante générale d'un système de vecteurs. — On appelle somme géométrique de plusieurs vecteurs $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \ldots, \overrightarrow{V_n}$ la résultante d'un contour dont les composantes sont équipollentes aux vecteurs donnés. On l'obtient en portant à partir d'un point arbitraire O les vecteurs $\overrightarrow{OC_1}, \overrightarrow{C_1C_2}, \ldots \overrightarrow{C_{n-1}C_n}$ respectivement égaux et parallèles à $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \ldots \overrightarrow{V_n}$; le vecteur $\overrightarrow{OC_n}$ est la *somme géométrique* ou la *résultante générale* des vecteurs donnés.

En appliquant le théorème des projections, on voit que la projection sur un axe de la somme géométrique de plusieurs vecteurs est égale à la somme des projections sur cet axe des vecteurs donnés ; en particulier les projections sur Ox, Oy, Oz sont

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \Sigma X_k, \qquad Y = \Sigma Y_k, \qquad Z = \Sigma Z_k.$$

Les sommes précédentes sont indépendantes de l'ordre des termes ; on en conclut que la somme géométrique de plusieurs vecteurs est indépendante de l'ordre de ces vecteurs.

La définition de la somme géométrique est indépendante de la nature des vecteurs donnés, qu'ils soient libres, glissants ou liés à des points. Dans certaines applications, on envisage des vecteurs concourants ou liés à un même point ; la résultante est alors considérée comme liée à ce point. Mais en général, la somme géométrique est un vecteur libre.

On effectue la détermination de la résultante générale de plusieurs vecteurs par des procédés géométriques ou analytiques. Si l'on envisage par exemple deux vecteurs concourants, leur résultante est la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs ; les méthodes employées en géométrie ou en trigonométrie pour la résolution des triangles permettent de déterminer graphiquement ou numériquement les éléments inconnus de ce parallélogramme, ou du triangle qui en est la moitié, en fonction des éléments donnés.

La somme géométrique de plusieurs vecteurs s'obtient dans le cas général en appliquant le théorème des projections : la projection sur un axe de cette somme géométrique est égale à la somme des projections sur cet axe

des vecteurs donnés ; en particulier les projections sur les axes de coordonnées sont

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \Sigma X_k,$$
$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = \Sigma Y_k,$$
$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = \Sigma Z_k ;$$

ces projections déterminent la somme géométrique.

On peut remarquer que les sommes précédentes sont indépendantes de l'ordre des termes ; on en conclut que la résultante de plusieurs vecteurs est indépendante de l'ordre de ces vecteurs.

Pour que la somme géométrique de plusieurs vecteurs soit nulle, il faut et il suffit que le contour $OC_1C_2 \dots C_n$ soit fermé, c'est-à-dire que l'on ait $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$. Cette condition exige que l'on ait séparément

$$X = \Sigma X_k = 0, \qquad Y = \Sigma Y_k = 0, \qquad Z = \Sigma Z_k = 0 ;$$

ces trois équations sont manifestement nécessaires et suffisantes.

5. Moment résultant d'un système de vecteurs par rapport à un point. — Le moment résultant de plusieurs vecteurs par rapport à un point est la somme géométrique des moments de ces vecteurs par rapport au point considéré, cette somme étant traitée comme un vecteur lié à ce même point.

Si le point est l'origine des coordonnées, et si L_1, M_1, N_1 ; L_2, M_2, N_2 ;..... sont les projections sur les axes des moments des vecteurs donnés, les projections du moment résultant sont

$$(4) \qquad \begin{cases} L = L_1 + L_2 + \dots = \Sigma L_k, \\ M = M_1 + M_2 + \dots = \Sigma M_k, \\ N = N_1 + N_2 + \dots = \Sigma N_k ; \end{cases}$$

le moment résultant est manifestement indépendant de l'ordre des vecteurs ; pour qu'il soit nul, il faut et il suffit que L, M, N soient séparément nuls.

Si l'on envisage un autre point O' de coordonnées x_0, y_0, z_0, et si l'on prend les moments par rapport à ce point, nous aurons encore les projections du moment résultant par les formules

$$L' = \Sigma L'_k, \qquad M' = \Sigma M'_k, \qquad N' = \Sigma N'_k ;$$

en utilisant les formules (2), nous aurons

$$(5) \qquad \begin{cases} L' = \Sigma L_k - \Sigma(y_0 Z_k - z_0 Y_k) = L - (y_0 Z - z_0 Y), \\ M' = \Sigma M_k - \Sigma(z_0 X_k - x_0 Z_k) = M - (z_0 X - x_0 Z), \\ N' = \Sigma N_k - \Sigma(x_0 Y_k - y_0 X_k) = N - (x_0 Y - y_0 X). \end{cases}$$

Remarquons que les parenthèses des derniers membres prises avec le signe — représentent les projections du moment par rapport à O' de la résul-

tante générale du système appliquée en O; nous en déduisons le théorème suivant, connu sous le nom de *théorème du transport* :

Si l'on connaît pour un point O la résultante générale $\overrightarrow{OR}$ et le moment résultant $\overrightarrow{OG}$ d'un système de vecteurs, on obtient les éléments analogues pour un autre point O′ de la manière suivante (fig. 5) : 1° la résultante générale $\overrightarrow{O'R'}$ est égale à $\overrightarrow{OR}$ transportée parallèlement à elle-même en O′; 2° le moment résultant $\overrightarrow{O'G'}$ est la somme géométrique de deux moments, l'un $\overrightarrow{O'g'}$ égal à $\overrightarrow{OG}$ transporté parallèlement à lui-même en O′, l'autre $\overrightarrow{O'g''}$ étant le moment de la résultante $\overrightarrow{OR}$ par rapport à O′.

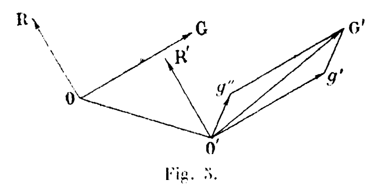


Fig. 5.

6. Théorème de Varignon. — Considérons un système de vecteurs concourant en un point de coordonnées x, y, z ; les projections du moment résultant de ces vecteurs par rapport au point O sont, d'après les formules (1) et (4),

$$L = \Sigma(yZ_k - zY_k) = y(\Sigma Z_k) - z(\Sigma Y_k) = yZ - zY,$$
$$M = zX - xZ, \qquad N = xY - yX ;$$

on déduit de là le théorème suivant, appelé théorème de Varignon :

Le moment résultant d'un système de vecteurs concourants par rapport à un point ou par rapport à un axe est égal au moment par rapport à ce point ou à cet axe de la résultante du système.

7. Invariants d'un système de vecteurs. Axe central. — On voit d'après ce qui précède l'importance des notions de résultante générale et de moment résultant d'un système de vecteurs ; le théorème du transport montre du reste que la connaissance de ces éléments en un point entraîne la connaissance des éléments analogues en un autre point quelconque ; il suffit donc de déterminer ces éléments en un point O, ou de calculer les projections X, Y, Z de la résultante et L, M, N du moment résultant par rapport à ce point. Ces six quantités sont appelées les six coordonnées du système de vecteurs.

La longueur de la résultante a son carré égal à $X^2 + Y^2 + Z^2$; c'est une quantité indépendante des axes choisis ; on dit que cette longueur, $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, est un invariant du système de vecteurs.

La projection du moment résultant en un point sur la résultante générale appliquée en ce point est aussi un invariant ; cela résulte du théorème du transport et de la figure 5 ; en effet le moment $\overrightarrow{O'g''}$ de $\overrightarrow{OR}$ par rapport à O′ est

normal à $\overrightarrow{O'R'}$; la projection du moment $\overrightarrow{O'G'}$ sur $\overrightarrow{O'R'}$ est donc égale à celle de $\overrightarrow{O'g'}$ ou de $\overrightarrow{OG}$.

Cette projection est égale à $L\alpha + M\beta + N\gamma$ si α, β, γ désignent les cosinus directeurs de OR ; leurs valeurs étant $\frac{X}{R}, \frac{Y}{R}, \frac{Z}{R}$, la projection invariante du moment résultant est égale à

$$(6) \qquad \frac{LX + MY + NZ}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}};$$

comme la fraction et le dénominateur sont des invariants, le numérateur $LX + MY + NZ$ est aussi un invariant.

Les points O′ pour lesquels le moment résultant O′G′ est minimum sont ceux pour lesquels ce moment résultant est parallèle à la résultante générale, car le moment résultant est toujours supérieur ou égal à sa projection invariante. Si cette résultante n'est pas nulle, les coordonnées x_0, y_0, z_0 des points O′ cherchés satisfont dès lors au système d'équations

$$(7) \qquad \frac{L - (y_0 Z - z_0 Y)}{X} = \frac{M - (z_0 X - x_0 Z)}{Y} = \frac{N - (x_0 Y - y_0 X)}{Z}.$$

Utilisons une propriété bien connue des rapports. En multipliant les deux termes des fractions respectivement par X, Y, Z et les ajoutant, nous voyons que la valeur commune de ces rapports est égale à

$$\frac{LX + MY + NZ}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Les équations (7) représentent une droite sur laquelle les coordonnées courantes sont x_0, y_0, z_0. Cette droite est appelée *axe central* du système. Le moment résultant a la même valeur (6) en tous les points de cette droite, comme le montrerait du reste le théorème du transport.

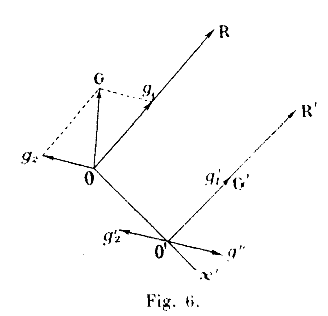


Fig. 6.

On peut déterminer géométriquement l'axe central de la façon suivante (*fig.* 6) : soient $\overrightarrow{OR}$ et $\overrightarrow{OG}$ la résultante et le moment résultant au point O ; décomposons $\overrightarrow{OG}$ en deux vecteurs $\overrightarrow{Og_1}$, $\overrightarrow{Og_2}$ l'un dirigé suivant $\vec{R}$, l'autre normal à $\vec{R}$; sur la perpendiculaire Ox' au plan Og_1g_2, ayant un sens tel que le trièdre Ox', OR, Og_2 soit de même sens que le trièdre de coordonnées, portons un segment OO′ tel que $R \times OO' = Og_2$; le point O′ fait partie de l'axe

central, qui est d'ailleurs parallèle au support de $\vec{R}$. En effet, la résultante générale en O' est $\overrightarrow{O'R'}$ équipollente à $\overrightarrow{OR}$; le moment résultant est la résultante du vecteur $\overrightarrow{OG}$ (ou ce qui revient au même, des vecteurs $\overrightarrow{Og_1}$, $\overrightarrow{Og_2}$ transportés en $\overrightarrow{O'g'_1}$, $\overrightarrow{O'g'_2}$) et du vecteur $\overrightarrow{O'g''}$, moment de $\overrightarrow{OR}$ par rapport à O' ; mais $\overrightarrow{O'g''}$ est égal et opposé à $\overrightarrow{O'g'_2}$, par suite le moment résultant $\overrightarrow{O'G'}$ est identique à $\overrightarrow{O'g'_1}$ et est porté par la même droite que $\vec{R'}$.

Dans le cas particulier où la résultante générale est nulle, le moment résultant est le même en tous les points de l'espace et il n'y a pas lieu d'envisager d'axe central.

8. Systèmes équivalents. — Deux systèmes de vecteurs sont dits équivalents s'ils ont même résultante générale et même moment résultant par rapport à un point. Il faut et il suffit que leurs six coordonnées dans un système d'axes dont ce point serait l'origine soient respectivement égales, ce qui exige six équations $X' = X$, $Y' = Y$, $Z' = Z$, $L' = L$, $M' = M$, $N' = N$. Deux systèmes équivalents ont grâce au théorème du transport même résultante générale et même moment résultant par rapport à tout point de l'espace. Deux systèmes équivalents à un même troisième sont manifestement équivalents entre eux.

Supposons que le système des vecteurs $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$, $\vec{V_3}$ soit équivalent au système $\vec{V_4}$, $\vec{V_5}$; nous indiquerons ce fait par l'égalité symbolique

$$\vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3} = \vec{V_4} + \vec{V_5}.$$

Cette égalité résume les six équations

$$X_1 + X_2 + X_3 = X_4 + X_5 ; \qquad Y_1 + Y_2 + Y_3 = Y_4 + Y_5 ;$$
$$Z_1 + Z_2 + Z_3 = Z_4 + Z_5 ;$$
$$L_1 + L_2 + L_3 = L_4 + L_5 ; \quad M_1 + M_2 + M_3 = M_4 + M_5 ; \quad N_1 + N_2 + N_3 = N_4 + N_5.$$

Une égalité symbolique peut manifestement se traiter comme une équation. On aura par exemple $\vec{V_1} - \vec{V_4} = \vec{V_5} - \vec{V_2} - \vec{V_3}$, car cette égalité symbolique résume les six équations $X_1 - X_4 = X_5 - X_2 - X_3$, ..., équations qui se déduisent immédiatement des six équations précédemment écrites.

Nous allons démontrer que *deux systèmes ayant même moment résultant par rapport à trois points non en ligne droite sont équivalents.*

En effet, soient O, O' et O'' les trois points pour lesquels les moments $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{O'G'}$, $\overrightarrow{O''G''}$ ont la même valeur pour les deux systèmes ; choisissons un système d'axes ayant O pour origine, tel que Ox passe par O' et le plan Oxy passe par O'' ; soient $(x'_0, 0, 0)$ les coordonnées de O', $(x''_0, y''_0, 0)$ celles de O'', soient $\vec{R_1}(X_1, Y_1, Z_1)$ et $\vec{R_2}(X_2, Y_2, Z_2)$ les résultantes générales des deux systèmes ; le moment $\overrightarrow{OG}(L, M, N)$ étant le même, en écrivant que $\overrightarrow{O'G'}$ et $\overrightarrow{O''G''}$

sont les mêmes, nous aurons les égalités

$$M' - M = x_0''Z_1 = x_0''Z_2,$$
$$N' - N = -x_0'Y_1 = -x_0'Y_2,$$
$$N'' - N = -(x_0''Y_1 - y_0''X_1) = -(x_0''Y_2 - y_0''X_2),$$

qui entraînent $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$, $Z_1 = Z_2$; par suite les deux systèmes sont équivalents.

9. Classification des systèmes de vecteurs. — On peut ranger les systèmes dans les quatre catégories suivantes :

1° Systèmes nuls ou équivalents à zéro. — Dans le cas où il n'existe aucun vecteur, la résultante générale et le moment résultant par rapport à un point quelconque sont nuls. Réciproquement, si la résultante générale et le moment résultant d'un système par rapport à un point sont nuls, le système est équivalent à un système ne renfermant aucun vecteur ; on dit qu'il est nul ou équivalent à zéro. Les conditions pour qu'il en soit ainsi sont que les six coordonnées X, Y, Z, L, M, N soient nulles.

2° Systèmes équivalents à un vecteur. — Si l'on considère un seul vecteur, la résultante est égale à ce vecteur ; le moment résultant par rapport à un point de son support est nul ; le moment résultant par rapport à un autre point est un vecteur normal au premier.

Réciproquement, si la résultante d'un système n'est pas nulle, et que le moment résultant par rapport à un point soit nul ou normal à la résultante, le système est équivalent à un seul vecteur. Si l'on prend en effet un point O' de son axe central (n° 7), le moment résultant par rapport à ce point O' est nul, le système est équivalent à un seul vecteur passant par O' et égal à la résultante ; on le détermine par les équations (7) ou par la méthode géométrique indiquée n° 7. Les conditions pour qu'il en soit ainsi sont

$$X^2 + Y^2 + Z^2 \neq 0, \qquad LX + MY + NZ = 0.$$

3° Systèmes équivalents à un couple. — On appelle couple un système de deux vecteurs égaux, parallèles, de sens opposés, mais non placés sur le même support. La résultante générale est nulle ; le moment résultant par rapport à un point n'est pas nul, mais il a la même valeur en tous les points de l'espace, comme cela résulte des équations (5) lorsque $X = Y = Z = 0$. Le moment résultant d'un couple est donc un vecteur que l'on peut transporter d'une manière quelconque parallèlement à lui-même ; c'est un vecteur libre. On l'appelle l'*axe du couple*.

Pour construire le plus rapidement possible l'axe d'un couple, on prend le point O sur l'un des deux vecteurs (*fig.* 7) ; le moment ou l'axe du couple est alors égal au moment de l'autre vecteur par rapport à ce point, ou bien égal au produit de l'un des vecteurs du couple par leur plus courte distance, qui est encore appelée le bras de levier du couple.

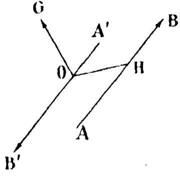


Fig. 7.

Réciproquement, si la résultante générale d'un système est nul, et si son moment par rapport à un point n'est pas nul, le système est équivalent à un couple dont l'axe est égal au vecteur moment donné ou à tout autre équipollent. On peut construire les vecteurs du couple en prenant dans un plan perpendiculaire à l'axe deux vecteurs égaux, parallèles et opposés, tels que le produit de l'un d'eux par leur plus courte distance soit égal au moment donné ; il faut de plus choisir le sens des vecteurs de façon qu'ils tendent à faire tourner le bras de levier du couple dans le sens positif pour un observateur placé sur l'axe ; on peut choisir arbitrairement la direction des vecteurs et leur grandeur ou celle du bras de levier.

On peut remplacer un couple par un autre équivalent en transportant ce couple parallèlement à lui-même dans son plan ou dans un plan parallèle ou en le faisant tourner dans son plan.

On peut ajouter qu'un système de plusieurs couples est équivalent à zéro ou à un couple unique, car la résultante générale est nulle ; l'axe du couple résultant est d'ailleurs égal à la somme géométrique des axes des couples composants ; on dit que l'on effectue ainsi la composition des couples.

Les conditions pour qu'un système soit équivalent à un couple sont manifestement

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \quad L^2 + M^2 + N^2 \neq 0.$$

4° Systèmes équivalents à un vecteur et à un couple ou à deux vecteurs non situés dans un même plan. — Si un système se compose d'un vecteur V et d'un couple C non parallèles à un même plan, la résultante générale est égale à V, le moment résultant par rapport à un point de V est égal à l'axe du couple ; par rapport à un point quelconque il est donné par le théorème du transport, par suite il n'est ni nul ni perpendiculaire à la résultante.

Réciproquement, si un système de vecteurs ne rentre pas dans les catégories précédentes, la résultante générale et le moment résultant par rapport à un point O ne sont ni nuls ni rectangulaires ; ce système est équivalent à un autre formé d'un vecteur passant par O et égal à la résultante, et d'un couple dont l'axe est égal au moment résultant ; si le point O est pris sur

l'axe central, la résultante est perpendiculaire au plan du couple. Un tel système est caractérisé par les inégalités

$$X^2 + Y^2 + Z^2 \neq 0, \qquad LX + MY + NZ \neq 0.$$

Un système constitué par deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$ non situés dans le même plan rentre dans la catégorie envisagée ; il est équivalent à l'ensemble d'un vecteur égal à leur somme géométrique passant par un point O_1 de $\overrightarrow{V_1}$ (*fig.* 8) et d'un couple dont l'axe est égal au moment de $\overrightarrow{V_2}$ par rapport à O_1. On construit du reste simplement cette résultante et ce couple en menant par O_1 des vecteurs $\overrightarrow{V_2'}$, $\overrightarrow{V_2''}$ égaux et parallèles à $\overrightarrow{V_2}$, le premier dans un sens opposé et le second dans le même sens ; la résultante $\overrightarrow{R}$ de $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2''}$ et le couple $\overrightarrow{V_2}$, $\overrightarrow{V_2'}$ forment un système équivalent au système donné.

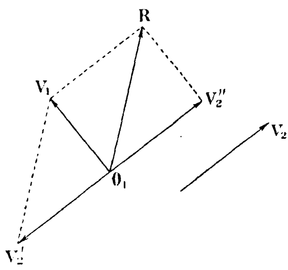


Fig. 8.

Réciproquement, un système formé d'un vecteur $\overrightarrow{R}$ et d'un couple $\overrightarrow{V_2}$, $\overrightarrow{V_2'}$ dont on peut toujours supposer que $\overrightarrow{V_2'}$ rencontre $\overrightarrow{R}$ est équivalent à un autre formé de deux vecteurs, l'un étant $\overrightarrow{V_2}$ et l'autre étant la résultante de $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{V_2'}$, c'est le vecteur $\overrightarrow{V_1}$ de la figure 8.

10. Réduction d'un système de vecteurs. Opérations élémentaires. — Réduire un système de vecteurs, c'est chercher un autre équivalent aussi simple que possible.

La réduction peut se faire d'une infinité de manières ; elle est basée sur la détermination de la résultante générale et du moment résultant du système par rapport à un point O, et elle varie généralement avec la position de ce point ; lorsqu'on se donne le point O, on dit que l'on effectue la réduction en ce point.

D'après ce qui précède, tout système peut être réduit à 0, 1 ou 2 vecteurs, ces deux vecteurs pouvant former un couple et, dans le cas général, pouvant être remplacés par un vecteur et un couple. La détermination effective de la réduction d'un système résulte du calcul des six coordonnées X, Y, Z, L, M, N de ce système et de son axe central (n° 7).

Dans certaines questions, comme la statique du corps solide, la notion de réduction est basée, d'une manière plus naturelle que la précédente, sur la considération d'opérations dites élémentaires effectuées sur les vecteurs et qui sont les suivantes : 1° introduction ou suppression de deux vecteurs égaux, por-

tés par la même droite et opposés ; 2° remplacement d'un système de vecteurs concourants par leur résultante appliquée au point de concours, ou inversement remplacement d'un vecteur par d'autres appliqués au même point et dont il est la résultante.

Ces opérations élémentaires permettent :

1° De faire glisser un vecteur sur son support : en effet si l'on a un vecteur $\overrightarrow{A_1B_1}$ et si l'on introduit sur le même support un vecteur $\overrightarrow{A_2B_2}$ égal au premier et de même sens et le vecteur $\overrightarrow{A_2B'_2}$ égal et opposé à $\overrightarrow{A_2B_2}$, on peut supprimer les vecteurs $\overrightarrow{A_1B_1}$ et $\overrightarrow{A_2B'_2}$ et il reste $\overrightarrow{A_2B_2}$, qui est $\overrightarrow{A_1B_1}$ transporté par glissement sur son support.

2° De réduire un système quelconque à 0, 1 ou 2 vecteurs dont l'un passe par un point arbitraire. Nous rappelons rapidement la démonstration classique de ce théorème. Ayant choisi arbitrairement trois points O, O_1, O_2 non en ligne droite, et considérant un vecteur $\overrightarrow{AB}$, non situé dans le plan des trois points, on peut, en opérant un transport si c'est nécessaire, supposer que l'origine A n'est pas dans le plan, joindre A à O, O_1, O_2, remplacer le vecteur par trois autres concourants dirigés suivant AO_1, AO_2, AO_3 et transporter ces vecteurs en O, O_1 et O_2. (Si $\overrightarrow{AB}$ est dans le plan des trois points, on peut le remplacer par deux autres dirigés suivant deux des trois droites AO, AO_1, AO_2.)

En opérant de même pour tous les vecteurs du système donné, on aboutit à un ensemble de vecteurs concourants en O, que l'on remplace par leur résultante $\vec{V}$, et des ensembles analogues en O_1 et O_2, que l'on remplace par leurs résultantes $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$; on voit déjà que tout système est réductible à trois vecteurs dont quelques-uns peuvent être nuls.

Si l'on a effectivement trois vecteurs $\vec{V}$, $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ appliqués en O, O_1, O_2, on considère une droite D commune aux deux plans OO_1V_1, OO_2V_2, et un point O′ arbitrairement choisi sur D ; on décompose $\vec{V_1}$ suivant les directions O_1O, O_1O' et $\vec{V_2}$ suivant O_2O, O_2O' (en les faisant glisser si c'est nécessaire), et on transporte les composantes en O et O′ ; on remplace alors les vecteurs appliqués en O par leur résultante, de même les vecteurs appliqués en O′, et l'on arrive ainsi à un système réduit composé de deux vecteurs.

Si ces vecteurs sont égaux et directement opposés, ils peuvent être supprimés et l'on arrive à un système nul ; si les vecteurs sont dans un même plan, ils peuvent être remplacés par un seul vecteur ou bien ils forment un couple ; enfin dans le cas général on peut remplacer deux vecteurs par un vecteur et un couple, comme nous l'avons dit dans le n° précédent.

Nous ferons aussi la remarque suivante, souvent appliquée : on peut transporter un vecteur $\overrightarrow{AB}$ parallèlement à lui-même en un point quelconque O, à la condition d'ajouter un couple de transport dont l'axe est égal au moment de $\overrightarrow{AB}$ par rapport à O. En effet, il suffit d'adjoindre à $\overrightarrow{AB}$ deux vecteurs $\overrightarrow{OB_1}$,

$\overrightarrow{OB_2}$, l'un équipollent à $\overrightarrow{AB}$, l'autre opposé à $\overrightarrow{OB_1}$ pour obtenir l'ensemble du vecteur $\overrightarrow{OB_1}$ et du couple $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OB_2}$ qui est précisément le couple de transport.

L'identité des deux modes de réduction d'un système de vecteurs résulte du théorème suivant.

Théorème. — *Si deux systèmes se déduisent l'un de l'autre par les opérations élémentaires, ils sont équivalents, et réciproquement deux systèmes équivalents peuvent se déduire l'un de l'autre par les opérations élémentaires.*

La proposition directe résulte de cette remarque que les opérations élémentaires ne modifient ni la résultante générale d'un système ni son moment résultant par rapport à un point, d'après la définition de la résultante et d'après le théorème de Varignon (n° 6).

Pour démontrer la réciproque, supposons que deux systèmes S_1 et S_2 aient même résultante et même moment résultant par rapport à un point O ; par les opérations élémentaires, effectuons la réduction du premier à deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V'_1}$ dont $\overrightarrow{V_1}$ passe par le point O, et la réduction du second à deux vecteurs $\overrightarrow{V_2}$, $\overrightarrow{V'_2}$ dont $\overrightarrow{V_2}$ passe par O ; comme on peut par des opérations élémentaires passer de S_1 à $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V'_1})$, puis de $(\overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V'_2})$ à S_2 [opérations inverses de celles qui ont permis de passer de S_2 à $(\overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V'_2})$], il suffit de montrer qu'on peut passer de $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V'_1})$ à $(\overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V'_2})$.

Or $\overrightarrow{V'_1}$ et $\overrightarrow{V'_2}$ sont dans un même plan perpendiculaire au moment résultant $\overrightarrow{OG}$, et ont même moment par rapport à O (*fig.* 9) ; s'ils ont même support, ils sont égaux et il en est de même de $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$; s'ils ne sont pas parallèles et si on les transporte en leur point de concours O′, on peut construire un vecteur $\overrightarrow{V'_3}$ tel que $\overrightarrow{V'_2}$ soit la résultante de $\overrightarrow{V'_1}$ et $\overrightarrow{V'_3}$; le moment de $\overrightarrow{V'_3}$ par rapport à O est nul d'après le théorème de Varignon, par suite $\overrightarrow{V'_3}$ passe par O. En adjoignant au système $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V'_1})$ le vecteur $\overrightarrow{V'_3}$ et le vecteur $\overrightarrow{V_3}$ passant par O, opposé à $\overrightarrow{V'_3}$, on remplace le système $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V'_1})$ par $\overrightarrow{V'_2}$ et par la résultante de $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_3}$: cette résultante ne peut être que $\overrightarrow{V_2}$, et la proposition est démontrée.

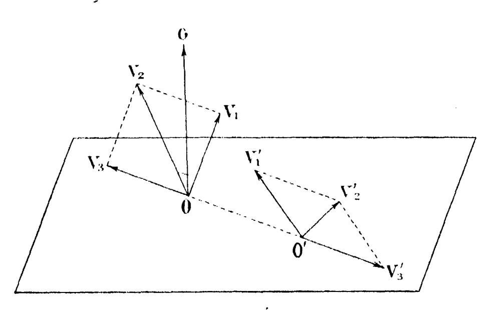


Fig. 9.

Si $\vec{V_1'}$ et $\vec{V_2'}$ étaient parallèles, il suffirait d'adjoindre à l'un des systèmes deux vecteurs égaux et directement opposés sur une droite passant par O, dans le plan de $\vec{V_1'}$ et $\vec{V_2'}$, pour se ramener au cas précédent.

Nous voyons ainsi que la réduction d'un système peut se faire soit par la méthode de l'équivalence, et le calcul est alors tout indiqué, soit par la méthode plutôt géométrique des opérations élémentaires.

11. Cas particuliers de systèmes de vecteurs. 1° Système de vecteurs concourants. — En prenant l'origine O au point de concours des vecteurs, leurs moments et le moment résultant (L, M, N) par rapport à O sont nuls ; le système est équivalent à zéro ou à une résultante passant par O, suivant que la somme géométrique des vecteurs est nulle ou ne l'est pas.

2° **Système de vecteurs dans un même plan.** — En prenant ce plan comme plan des xy, z et Z sont nuls pour tous les vecteurs, par suite les coordonnées Z, L, M sont nulles et la somme LX + MY + NZ est nulle. Si

$$X^2 + Y^2 \neq 0,$$

le système est réductible à un vecteur égal à la résultante générale et ayant pour support l'axe central du système, dont l'équation dans le plan des vecteurs est

$$N' = \Sigma(x_k Y_k - y_k X_k) - (x_0 Y - y_0 X) = 0.$$

Si $X^2 + Y^2 = 0$, et $N \neq 0$, le système est équivalent à un couple d'axe égal à N ; enfin si $X = Y = N = 0$, le système est nul.

3° **Système de vecteurs parallèles.** — En prenant l'axe Oz parallèle aux vecteurs, les quantités X, Y, N sont nulles pour chaque vecteur et pour le système ; la somme LX + MY + NZ est encore nulle.

Si $Z = \Sigma Z_k \neq 0$, le système est équivalent à un vecteur unique qu'on appelle sa résultante ; ce vecteur est égal à Z et a pour support l'axe central du système, dont les équations sont

$$L' = \Sigma y_k Z_k - y_0 Z = 0, \qquad M' = -\Sigma x_k Z_k + x_0 Z = 0 ;$$

elles donnent

$$x_0 = \frac{\Sigma x_k Z_k}{\Sigma Z_k}, \qquad y_0 = \frac{\Sigma y_k Z_k}{\Sigma Z_k}. \tag{8}$$

Remarquons que le moment résultant du système par rapport à un point est toujours égal à celui de sa résultante ; on peut donc étendre le théorème de Varignon (n° 6) au cas de vecteurs parallèles ayant une résultante :

Théorème. — *Le moment résultant par rapport à un point ou par rapport à un axe d'un système de vecteurs parallèles ayant une résultante est égal au moment par rapport à ce point ou par rapport à cet axe de la résultante du système.*

Si $Z = \Sigma Z_k = 0$, et $L^2 + M^2 \neq 0$, le système est équivalent à un couple dont l'axe (L, M, 0) est perpendiculaire à Oz ; si enfin on a $Z = L = M = 0$, le système est équivalent à zéro.

12. Moment par rapport à un plan. Centre de vecteurs parallèles. — Dans les formules (8) entrent les sommes $\Sigma x_k Z_k$, $\Sigma y_k Z_k$ dont chaque terme est le produit de la valeur relative d'un vecteur par celle de sa distance à un plan de coordonnées qui lui est parallèle ; un tel produit s'appelle moment du vecteur par rapport au plan ; un moment de cette espèce a une justification scalaire et n'est représenté par aucun vecteur.

Les formules (8) écrites sous la forme

$$\Sigma x_k Z_k = x_0 \Sigma Z_k, \qquad \Sigma y_k Z_k = y_0 \Sigma Z_k$$

sont la traduction du théorème suivant :

La somme des moments par rapport à un plan de vecteurs parallèles à ce plan et ayant une résultante est égale au moment par rapport à ce plan de la résultante de ces vecteurs.

Les considérations précédentes, qui s'appliquent à des vecteurs glissants, s'étendent à un système de vecteurs parallèles liés chacun à son point d'application. Soient α, β, γ les cosinus directeurs d'une droite dirigée à laquelle sont parallèles les vecteurs : soient F_1, F_2, ... les valeurs relatives de ces vecteurs, (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ... les coordonnées de leurs origines : leur résultante générale a pour valeur $F = \Sigma F_k$; nous nous placerons d'abord dans le cas où elle n'est pas nulle.

Lorsque les vecteurs sont parallèles à un axe de coordonnées, ils sont équivalents à un vecteur unique égal à F et passant par un point fourni par des formules analogues à (8) ; on est ainsi amené à dire dans le cas général que les vecteurs donnés ont une résultante qui leur est parallèle, dont la valeur est égale à F, et dont le point d'application a pour coordonnées

$$(9) \qquad \xi = \frac{\Sigma F_k x_k}{\Sigma F_k}, \qquad \eta = \frac{\Sigma F_k y_k}{\Sigma F_k}, \qquad \zeta = \frac{\Sigma F_k z_k}{\Sigma F_k};$$

nous allons vérifier que ce point, qu'on appelle *centre des vecteurs parallèles*, appartient à l'axe central du système donné. Pour un point de cet axe, comme on a $LX + MY + NZ = 0$, les valeurs de L', M', N' sont nulles, de sorte que

les équations de l'axe sont deux des trois équations

$$\begin{aligned} yZ - zY &= \Sigma(y_kZ_k - z_kY_k),\\ zX - xZ &= \Sigma(z_kX_k - x_kZ_k),\\ xY - yX &= \Sigma(x_kY_k - y_kX_k), \end{aligned}$$

ou, en remplaçant X_k, Y_k, Z_k par $F_k\alpha$, $F_k\beta$, $F_k\gamma$,

$$\begin{aligned} \gamma yF - \beta zF &= \gamma\Sigma F_ky_k - \beta\Sigma F_kz_k,\\ \alpha zF - \gamma xF &= \alpha\Sigma F_kz_k - \gamma\Sigma F_kx_k,\\ \beta xF - \alpha yF &= \beta\Sigma F_kx_k - \alpha\Sigma F_ky_k\,; \end{aligned}$$

on constate bien qu'elles sont vérifiées par ξ, η, ζ et cela quels que soient α, β, γ.

Le centre des vecteurs parallèles jouit des propriétés suivantes : 1° il reste invariable lorsqu'on fait varier α, β, γ ; par suite si l'on fait tourner les vecteurs composants autour de leurs points d'application tout en les laissant parallèles, leur résultante tourne autour du centre de la même manière ; 2° il reste invariable quand on augmente ou qu'on diminue tous les vecteurs dans le même rapport, car le numérateur et le dénominateur des seconds membres des formules (9) sont multipliés par le même facteur.

Si l'on appelle d'une manière générale *moment par rapport à un plan* d'un vecteur parallèle à une droite et lié à son point d'application le produit de sa valeur relative par celle de la distance de son origine au plan, les formules (9) expriment que la somme des moments de vecteurs parallèles par rapport à un plan de coordonnées est égale au moment de leur résultante, et cette propriété s'applique à un plan quelconque comme le montrerait un calcul immédiat.

Pour construire le centre de deux vecteurs parallèles appliqués en des points A_1 et A_2 (*fig.* 10), on remarque, d'après les formules (9), que ce centre est situé sur la droite A_1A_2 et la partage en segments inversement proportionnels aux vecteurs, ce qui s'exprime par les égalités

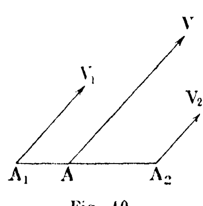


Fig. 10.

$$\frac{A_1A}{F_2} = \frac{AA_2}{F_1} = \frac{A_1A_2}{F_1 + F_2}\,;$$

cette remarque permet inversement de décomposer un vecteur en deux autres qui lui sont parallèles. On passe de là à trois vecteurs en composant la résultante des deux premiers avec le troisième, et ainsi de suite.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où la résultante générale est nulle, le système est équivalent à un couple ou à zéro ; l'axe du couple a pour

projections

$$L = \Sigma(y_k Z_k - z_k Y_k) = \gamma \Sigma F_k y_k - \beta \Sigma F_k z_k,$$
$$M = \Sigma(z_k X_k - x_k Z_k) = \alpha \Sigma F_k z_k - \gamma \Sigma F_k x_k,$$
$$N = \Sigma(x_k Y_k - y_k X_k) = \beta \Sigma F_k x_k - \alpha \Sigma F_k y_k.$$

Si $\Sigma F_k x_k$, $\Sigma F_k y_k$, $\Sigma F_k z_k$ ne sont pas tous nuls, L, M, N ne sont pas nuls sauf dans le cas où l'on a

$$\frac{\Sigma F_k x_k}{\alpha} = \frac{\Sigma F_k y_k}{\beta} = \frac{\Sigma F_k z_k}{\gamma};$$

le système est donc équivalent à un couple, sauf pour une orientation particulière des vecteurs, pour laquelle le système est équivalent à zéro.

Enfin si $\Sigma F_k x_k$, $\Sigma F_k y_k$, $\Sigma F_k z_k$ sont tous nuls, le système est toujours nul, quelle que soit l'orientation des vecteurs.

13. Produit scalaire et produit vectoriel de deux vecteurs. — Étant donnés deux vecteurs $\vec{V}$, $\vec{V'}$ d'espèces quelconques, libres, glissants ou liés chacun à un point, on envisage deux produits différents de ces vecteurs :

1° le produit scalaire, que l'on représente ordinairement par $\vec{V} . \vec{V'}$; il est égal au produit des valeurs de ces vecteurs et du cosinus de l'angle de leurs directions, ou, ce qui revient au même, au produit de la valeur de l'un de ces vecteurs par la projection de l'autre sur sa direction, c'est-à-dire à $[VV' \cos(V, V')]$. Si l'on donne les projections X, Y, Z, X′, Y′, Z′ de ces vecteurs et les cosinus des angles de leurs directions avec les axes, le produit a pour valeur

$$VV'(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') = XX' + YY' + ZZ'.$$

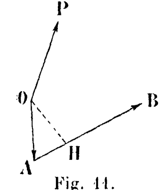


Fig. 11.

Il est nul si l'un des vecteurs est nul ou si les deux vecteurs sont rectangulaires ;

2° le produit vectoriel, que l'on représente ordinairement par $\vec{V} \times \vec{V'}$ ou $\vec{V} \wedge \vec{V'}$; si l'on forme un contour OAB (*fig.* 11) dont les composantes sont égales et parallèles aux vecteurs donnés, ce produit est par définition égal au moment de $\vec{AB}$ par rapport à O, c'est-à-dire au produit de AB par le bras de levier OH, ou à l'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs, c'est-à-dire à $VV' \sin(V, V')$, et il est représenté, comme le moment vectoriel, par un vecteur $\vec{OP}$ perpendiculaire au plan OAB, dans le sens indiqué au n° 2. Si le point O est l'origine, les coordonnées de A sont égales à X, Y, Z, et les projections sur les axes du vecteur produit sont

$$YZ' - ZY', \quad ZX' - XZ', \quad XY' - YX'.$$

Il est nul si l'un des vecteurs est nul ou si les deux vecteurs sont parallèles.

Le produit scalaire est indépendant de l'ordre des deux facteurs, mais il n'en est pas de même du produit vectoriel ; celui-ci change de sens et ses projections changent de signe quand on intervertit l'ordre des facteurs.

La propriété distributive de la multiplication, exprimée par l'égalité

$$(a + b)(a' + b') = aa' + ba' + ab' + bb',$$

est possédée par le produit scalaire et par le produit vectoriel, à la condition de considérer les sommes comme géométriques dans les opérations sur les vecteurs ; la démonstration par le calcul est immédiate en introduisant les projections des vecteurs et de leurs sommes sur les axes de coordonnées.

CHAPITRE II

CINÉMATIQUE DU POINT. VITESSE

14. Relativité du mouvement. — On ne peut étudier le mouvement ou le repos d'un point ou d'un système de points qu'en adoptant un repère de comparaison, par exemple un corps solide ou un trièdre de coordonnées attaché à ce corps. Un point est dit en repos ou en mouvement relativement à ce repère si ses distances à trois points du repère non en ligne droite, ou ses trois coordonnées, restent constantes ou varient avec le temps. Par exemple un corps posé sur le pont d'un bateau en marche est en repos par rapport à ce bateau et en mouvement par rapport au rivage ; un corps posé sur le sol est en repos par rapport à la Terre ou à des axes de coordonnées liés à elle, mais est en mouvement par rapport au Soleil ou à un trièdre lié au système solaire et dirigé vers des étoiles fixes. On ne peut donc étudier que le repos ou le mouvement relatifs ; on ne peut pas affirmer qu'il existe de repos ou de mouvement absolus.

La mesure du temps se fait au moyen d'appareils tels que des horloges qui permettent d'évaluer le nombre de secondes comprises entre deux instants. D'une manière analogue à ce que l'on fait en géométrie analytique lorsqu'on veut fixer la position d'un point sur une droite dirigée, on considère un instant particulier passé ou futur, par exemple minuit d'une date déterminée, et on l'appelle instant initial ou origine des temps ; tout autre instant est caractérisé par la mesure de l'intervalle de temps qui s'écoule entre l'origine et lui, affectée du signe + et du signe — suivant qu'il est postérieur ou antérieur à l'origine. Le nombre positif ou négatif ainsi obtenu est l'abscisse de l'instant considéré ; lorsque celui-ci est remplacé par d'autres, l'abscisse devient une variable que l'on représente par t. La durée d'un phénomène qui s'effectue entre les instants d'abscisses t et t' est égale à la différence $t' - t$.

15. Trajectoire. Loi du mouvement. — Le lieu des positions successives d'un point en mouvement est une ligne continue que l'on appelle sa *trajec-*

toire ; lorsqu'elle est une droite, le mouvement est ***rectiligne***. La loi qui permet de fixer à chaque instant la position du mobile sur sa trajectoire s'appelle *loi du mouvement* ; on peut l'envisager de plusieurs manières.

La première, que l'on peut qualifier d'intrinsèque, suppose que l'on sache évaluer les longueurs sur la trajectoire comme sur une droite ou un cercle ; on donne alors le sens du mouvement et les chemins parcourus en fonction du temps employé à les décrire, ou bien, ce qui est préférable et ce que nous supposerons, on prend sur la trajectoire une origine, un sens positif des segments ou des arcs, et l'on fixe chaque point de la ligne par son abscisse rectiligne ou curviligne s. La loi du mouvement est une relation de la forme

$$s = f(t) \tag{1}$$

entre l'abscisse s du mobile à chaque instant et l'abscisse t de cet instant.

On appelle *diagramme* la représentation graphique de la relation précédente dans un système d'axes de coordonnées où t est l'abscisse et s l'ordonnée ; les échelles adoptées peuvent être quelconques.

La deuxième manière consiste à donner les expressions en fonction du temps des coordonnées du mobile ; dans le cas des coordonnées rectilignes, elles sont de la forme

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t) ; \tag{2}$$

ces équations déterminent à la fois la trajectoire et la loi du mouvement. On peut envisager d'autres coordonnées : polaires, cylindriques, etc., fonctions du temps.

16. Vitesse. Sa représentation par un vecteur. — Plaçons-nous d'abord dans le cas où le mouvement est défini d'une manière intrinsèque par l'équation (1) ; on dit que le mouvement est *uniforme* si le déplacement a toujours lieu dans le même sens, et si les longueurs parcourues dans des temps égaux sont égales quels que soient ces temps : pour cela, il faut et il suffit que s soit une fonction linéaire de t, de la forme $s = a + bt$.

On appelle valeur absolue de la vitesse de ce mouvement la longueur de la portion de trajectoire parcourue pendant l'unité de temps, et ***vitesse*** la valeur relative de cette portion ; on la représente par v ; elle est égale au coefficient b. On peut la calculer en général en évaluant les abscisses s et s' du mobile à deux instants t et t' ; on a alors

$$v = \frac{s' - s}{t' - t}. \tag{3}$$

Inversement, la loi d'un mouvement uniforme dont on donne la vitesse v et l'abscisse initiale s_0 du mobile est $s = s_0 + vt$.

Au point de vue des équations de dimensions, une vitesse est le quotient d'une longueur par un temps et a pour équation $[V] = \left[\frac{L}{T}\right]$; avec sa valeur numérique, il faut indiquer les unités de longueur et de temps. Si un train parcourt d'un mouvement uniforme 72 kilomètres en 2 heures, sa vitesse est de $36 \frac{km}{h}$ ou de $\frac{36\,000}{60 \times 60} = 10 \frac{m}{s}$.

Lorsqu'un mouvement n'est pas uniforme, il est dit *varié* ; on appelle *vitesse moyenne* du mobile entre les positions A et A', correspondant aux instants t et t', la vitesse d'un mobile auxiliaire qui parcourrait d'un mouvement uniforme la même portion AA' entre les instants t et t' ; si $s = f(t)$ et $s' = f(t')$ sont les abscisses du mobile aux instants t et t', la vitesse moyenne est donnée par la formule (3).

On appelle *vitesse du mobile à l'instant t* la limite de la vitesse moyenne de ce mobile entre les instants t et t' lorsque l'intervalle de temps $t' - t$ tend vers zéro ; cette vitesse est égale à la dérivée de la fonction $s = f(t)$ pour la valeur t de la variable, et l'on a

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t). \tag{4}$$

On peut la déterminer graphiquement en utilisant le diagramme de la loi du mouvement (*fig.* 12). Tout mouvement uniforme est représenté par une droite ; la pente de cette droite, calculée en tenant compte des échelles, est égale à la vitesse, et en particulier un repos est représenté par une parallèle à l'axe des t. Pour un mouvement non uniforme, la vitesse à un instant t est égale à la pente de la tangente à la courbe au point M relatif à cet instant ; on la détermine par exemple en traçant les ordonnées des points m et m_1 correspondant aux instants t et $t+1$, et mesurant la différence $M_1M'_1$ des ordonnées de la tangente relatives à ces deux points.

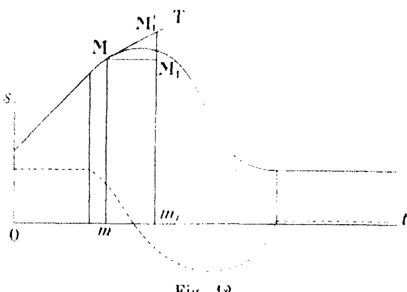


Fig. 12.

Nous avons tracé en pointillé sur la figure 12 le diagramme des vitesses; dans les mouvements naturels, la vitesse ne peut changer brusquement de

valeur, et le diagramme de l'espace ne présente pas de point anguleux.

On représente la vitesse par un vecteur lié à la position du mobile ; dans le cas d'un mouvement rectiligne, ce vecteur est porté par la trajectoire ; dans le cas d'un mouvement curviligne, par la tangente à la trajectoire au point considéré. Sur la demi-tangente dans le sens du mouvement on porte un segment égal à la valeur absolue de la vitesse ; ou bien encore on prend sur la tangente un sens positif ayant la direction des arcs s croissants, et sur ce support on porte un segment ayant même valeur relative que la vitesse. En examinant le cas où la vitesse v est positive et le cas où elle est négative, on vérifie que ces deux manières conduisent au même résultat.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où la trajectoire et la loi du mouvement sont données sous la forme (2) ; si aux instants t et t' le mobile occupe les positions A et A′ (*fig.* 13), on appelle vitesse moyenne à l'instant t la vitesse qu'aurait un mobile auxiliaire se déplaçant d'un mouvement uniforme sur la corde AA′, de façon à être en A et A′ aux instants t et t' ; cette vitesse, égale à $\dfrac{\text{corde AA}'}{t'-t}$, est représentée par un vecteur $\overrightarrow{V_m}$; la limite de ce vecteur lorsque l'intervalle $t'-t$ tend vers zéro est un vecteur $\vec{V}$ qu'on appelle vitesse à l'instant t.

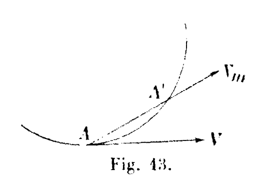


Fig. 13.

Ce vecteur est identique à celui que nous avons introduit dans le cas précédent ; en effet, il a pour support la limite de la corde, c'est-à-dire la tangente en A ; il est dirigé dans le sens du mouvement ; enfin il est égal à $\dfrac{ds}{dt}$, car on sait que la limite du rapport de la corde AA′ à l'arc est égale à l'unité, et par suite

$$\lim \frac{\text{corde AA}'}{t'-t} = \lim \frac{\text{arc AA}'}{t'-t} = \frac{ds}{dt}.$$

Si Δx, Δy, Δz sont les accroissements des coordonnées du mobile en passant de A à A′, et Δt l'accroissement $t'-t$ du temps, les projections du vecteur $\overrightarrow{V_m}$ sont $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$, $\dfrac{\Delta z}{\Delta t}$, et celles du vecteur $\vec{V}$, qui en est la limite, sont égales à

$$(5) \qquad V_x = x'_t = \frac{dx}{dt}, \qquad V_y = y'_t = \frac{dy}{dt}, \qquad V_z = z'_t = \frac{dz}{dt} ;$$

on vérifie bien que la grandeur de la vitesse, égale à $\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}$, a pour valeur $\dfrac{ds}{dt}$. On peut remarquer aussi que la projection du vecteur vitesse sur un plan ou sur un axe est égale au vecteur vitesse du mouvement projeté sur ce plan ou sur cet axe.

17. Cas d'un mouvement circulaire. Vitesse angulaire. — Si un point A se déplace sur un cercle de rayon r, sa position est déterminée par l'angle $\theta = A_0OA$ que forme son rayon vecteur OA avec un rayon OA_0 pris pour origine et porté par l'axe Ox.

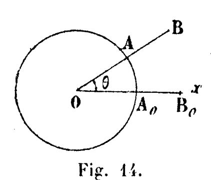


Fig. 14.

L'angle θ est une fonction $f(t)$ du temps. L'arc $A_0A = s$ est donné par $s = r\theta$. La loi du mouvement est donc $s = rf(t)$. La vitesse est égale à

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}.$$

La quantité $\frac{d\theta}{dt}$ s'appelle vitesse angulaire et se désigne par ω. On a donc la formule

$$v = \omega r.$$

Il est évident que la vitesse angulaire est la même pour tout autre point B porté par le rayon OA, car on a $\theta = \widehat{B_0OB}$.

Dans le cas d'un mouvement uniforme, on a $\theta = \omega t$ si à l'origine du temps le mobile est en A_0.

Examinons d'une manière plus générale le cas où le point mobile reste à une distance constante r d'un point O ; sa trajectoire est la section de la sphère de centre O et de rayon r par le cône de sommet O engendré par OA. Considérons la section de ce cône par la sphère de rayon un concentrique à la première (*fig.* 15). Lorsque le point A décrit un arc $A_0A = s$ de sa trajectoire, le point correspondant a, intersection de OA avec la deuxième sphère, décrit un arc homothétique a_0a que nous désignerons par σ, et l'on a $s = r\sigma$. La vitesse de A est égale à $\frac{ds}{dt} = r\frac{d\sigma}{dt}$; elle est représentée par un vecteur $\vec{V}$ perpendiculaire à OA, dans le plan tangent au cône engendré par OA.

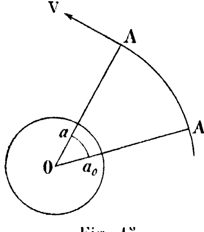


Fig. 15.

Dans le cas où la trajectoire est plane, σ est égal à l'angle θ envisagé dans le mouvement circulaire.

18. Changement de système de comparaison. Composition des vitesses. — Après avoir étudié le mouvement d'un point A par rapport à un système S, et déterminé sa vitesse, on peut se proposer d'étudier son mouvement par rapport à un autre système S_1 en utilisant le mouvement de A par rapport à S

et celui de S par rapport à S_1 ; on dit alors que le premier est le mouvement *relatif*, le deuxième le mouvement d'*entraînement*, et on a l'habitude de dire que le mouvement de A par rapport à S_1 est le mouvement ***absolu*** ; il est dit aussi ***résultant*** des deux premiers, qui sont les mouvements ***composants***.

Pour déterminer la trajectoire et la loi du mouvement absolu, on peut opérer de la manière suivante : Soit (*fig.* 16), à un certain instant t, A la position du mobile dans S ; le point invariablement lié à S où se trouve A à cet instant s'appelle *point coïncident*, nous le désignerons par A_e. Pour l'observateur lié à S et placé en A_e, le mouvement de A se fait suivant une

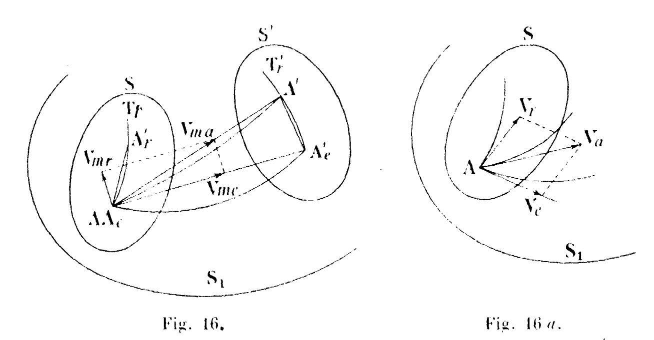


Fig. 16. Fig. 16 *a*.

trajectoire relative T_r et, dans un intervalle de temps de t à t', A décrit dans le mouvement relatif un certain arc AA'_r de cette trajectoire. Mais pour l'observateur lié à S_1, le système S se déplace dans le même intervalle de temps de S à S' ; A_e décrit dans le mouvement d'entraînement un arc $A_eA'_e$, la trajectoire relative T_r se trouve transportée en T'_r et la position finale de A est un point A' tel que l'arc A'_eA' soit égal à AA'_r. On peut de cette façon construire dans le système S_1 les positions successives A' du point A, et en déduire la trajectoire et le mouvement absolus.

La vitesse de A dans ce mouvement absolu est en grandeur et en position la limite du vecteur $\overrightarrow{V_{ma}}$ égal à $\dfrac{\text{corde } AA'}{t'-t}$, lorsque $t'-t$ tend vers zéro. Mais la corde AA' est la somme géométrique des cordes $A_eA'_e$ et A'_eA' ; par suite le vecteur $\overrightarrow{V_{ma}}$ appliqué en A est la somme géométrique du vecteur $\overrightarrow{V_{me}}$ égal à $\dfrac{\text{corde } A_eA'_e}{t'-t}$, appliqué en A, et du vecteur $\overrightarrow{V_{mr}}$ équipollent à $\overrightarrow{V_{mr}}$ égal à $\dfrac{\text{corde } A'_eA'}{t'-t}$. Lorsque $t'-t$ tend vers zéro, $\overrightarrow{V_{me}}$ a pour limite le vecteur vitesse

$\vec{V}_e$ du point coïncident A_e dans le mouvement d'entraînement ; comme la corde A'_eA' est égale à la corde AA'_r et que la limite de la direction de la première est la même que celle de la seconde quand T'_r se rapproche de T_r, on en conclut que le vecteur $\overrightarrow{V_{mr}}$ a pour limite le vecteur vitesse $\vec{V}_r$ de A dans le mouvement relatif. Dès lors $\overrightarrow{V_{ma}}$, qui est toujours la somme géométrique de $\overrightarrow{V_{me}}$ et $\overrightarrow{V_{mr}}$, a une limite $\vec{V}_a$ égale à la somme géométrique $\vec{V}_e$ et $\vec{V}_r$ (*fig.* 16*a*).

En désignant, pour abréger, par trajectoire et vitesse d'entraînement la trajectoire et la vitesse du point coïncident dans le mouvement d'entraînement, on peut énoncer le théorème suivant :

La vitesse absolue d'un mobile à un instant est la somme géométrique de la vitesse d'entraînement et de la vitesse relative de ce mobile à cet instant.

19. Exemples. — L'exemple le plus simple est celui où les mouvements relatif et d'entraînement sont rectilignes et uniformes ; le mobile se déplace sur une droite S d'un mouvement uniforme pendant que cette droite se déplace parallèlement à elle-même, un de ses points ayant un mouvement rectiligne et uniforme. Si $\vec{V}_r$ et $\vec{V}_e$ sont les vitesses de ces mouvements (*fig.* 17), la vitesse $\vec{V}_a$ du mouvement absolu est à chaque instant la somme géométrique de $\vec{V}_r$ et $\vec{V}_e$; le mouvement résultant est aussi rectiligne et uniforme.

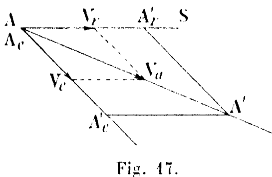


Fig. 17.

Un autre exemple est celui du mouvement hélicoïdal ; le mouvement relatif de A a lieu sur une droite S restant perpendiculaire à un plan P, pendant que le point où elle rencontre ce plan est animé d'un mouvement d'entraînement circulaire dans ce plan (*fig.* 18) ; on suppose de plus que le déplacement relatif s est constamment proportionnel au déplacement angulaire θ d'entraînement, ou que $s = k\theta$.

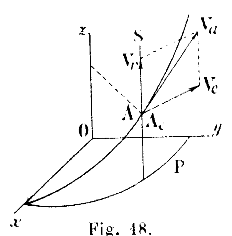


Fig. 18.

Si r est le rayon du cylindre engendré par la droite S, la vitesse d'entraînement est égale à $r\dfrac{d\theta}{dt}$ et est portée par la tangente au cercle décrit par le point coïncident A_e, la vitesse relative $\vec{V}_r$, égale à $\dfrac{ds}{dt} = k\dfrac{d\theta}{dt}$, est proportionnelle à la première ; on en conclut que la vitesse absolue, qui est la somme géométrique des deux premières et qui est tangente à l'hélice décrite

par le mobile dans le mouvement absolu, fait un angle constant avec la génératrice du cylindre sur lequel est tracée cette hélice ; on retrouve ainsi la propriété de la tangente à l'hélice.

Remarquons que l'on peut, dans cet exemple, intervertir le rôle du mouvement relatif et du mouvement d'entraînement, et envisager le mouvement hélicoïdal comme résultant d'un mouvement relatif circulaire sur un cercle C pendant que, dans le mouvement d'entraînement, ce cercle se déplace en restant parallèle à lui-même, son centre décrivant une droite perpendiculaire à son plan. On peut même faire abstraction du système entraîné et dire simplement que le mobile est animé par rapport à S_1 de deux mouvements simultanés ; sa vitesse est toujours la somme géométrique des vitesses des mouvements composants.

On généralise cette remarque au cas d'un nombre quelconque de mouvements simultanés composants ; c'est ainsi que l'on peut considérer le mouvement d'un mobile comme résultant des mouvements rectilignes de ses projections sur les trois axes de coordonnées ; sa vitesse est la somme géométrique des vitesses de ces projections.

20. Mouvement en coordonnées polaires dans le plan et dans l'espace. — On peut étudier le mouvement d'un point mobile dans un plan en donnant les expressions en fonction du temps des coordonnées polaires r et θ de ce point. On se propose alors de déterminer les projections de la vitesse $\vec{V}$ du mobile sur la direction du rayon vecteur et sur la perpendiculaire à cette direction, c'est-à-dire les projections v_r et v_p de la vitesse sur les axes que nous désignons par Or et Op (*fig.* 19), faisant respectivement avec Ox les angles θ et $\theta + \frac{\pi}{2}$.

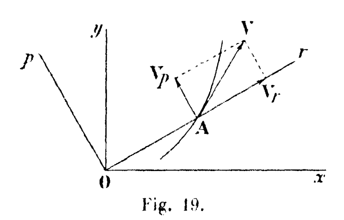


Fig. 19.

Il suffit pour cela de considérer le mouvement comme résultant de deux autres, l'un relatif sur l'axe Or et l'autre d'entraînement de cet axe autour du point O ; le premier est un mouvement rectiligne défini par la variation de r, l'autre un mouvement de rotation défini par la variation de θ ; les vitesses relative et d'entraînement de A sont l'une égale à $\frac{dr}{dt}$ portée par l'axe Or, l'autre égale à $r\frac{d\theta}{dt}$ portée par une perpendiculaire à cet axe dans le sens positif, c'est-à-dire par une parallèle à l'axe Op. On voit donc que les projections de $\vec{V}$ sur ces deux axes sont précisément ces deux vitesses, et ont pour

valeurs

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \qquad v_p = r\frac{d\theta}{dt}. \tag{6}$$

On serait arrivé à la même conclusion en utilisant les valeurs des projections de la vitesse sur les axes Ox, Oy et écrivant que la projection du vecteur vitesse sur un axe est égale à la somme des projections sur cet axe des deux composantes de ce vecteur ; on a donc

$$v_r = \frac{dx}{dt}\cos\theta + \frac{dy}{dt}\sin\theta, \qquad v_p = -\frac{dx}{dt}\sin\theta + \frac{dy}{dt}\cos\theta.$$

En remplaçant x et y par $r\cos\theta$ et $r\sin\theta$, on retrouve les formules (6).

Si l'on utilise dans l'espace les coordonnées cylindriques r, θ, z, on peut considérer le mouvement comme résultant d'un mouvement en coordonnées polaires dans un plan parallèle au plan xOy et d'un mouvement parallèle à Oz ; les projections de la vitesse sur les axes Or, Op et Oz sont

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \qquad v_p = r\frac{d\theta}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Enfin on peut imaginer que la position d'un point A dans l'espace est définie par la valeur relative r du rayon vecteur OA porté par une droite dirigée OD, et par les paramètres de déplacement de OD, par exemple les coordonnées polaires θ et ψ. Nous considérerons encore le mouvement de A comme résultant de deux autres, un mouvement relatif sur OD, défini par la variation de r, et un mouvement d'entraînement de OD, défini par le déplacement de cette droite sur le cône qu'elle engendre ; les vitesses relative et d'entraînement sont respectivement la première égale à $\frac{dr}{dt}$ portée par OD, la seconde égale à $r\frac{d\sigma}{dt}$ (n° 17), portée par la perpendiculaire à OD dans le plan tangent au cône. Si nous désignons par Or et Oq les axes confondus avec OD et avec la perpendiculaire à cette droite dans le plan tangent, suivant la direction des arcs σ croissants, nous voyons que les projections de la vitesse de A sur ces axes sont

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \qquad v_q = r\frac{d\sigma}{dt}. \tag{7}$$

21. Vitesse considérée comme dérivée géométrique. — Considérons le vecteur $\overrightarrow{OA}$ joignant un point fixe O aux positions successives d'un point mobile en mouvement ; soient $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ les vecteurs correspondant aux instants t et t' (*fig.* 20) ; leur différence géométrique, $\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA}$, est équipollente à la corde AA' ; la limite du rapport $\frac{\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA}}{t' - t}$ lorsque $t' - t$ tend vers zéro

s'appelle la dérivée géométrique du vecteur $\overrightarrow{OA}$; elle est un vecteur $\overrightarrow{W}$ équipollent au vecteur vitesse $\overrightarrow{V}$ du point A.

Les considérations développées précédemment montrent que la dérivée géométrique d'un vecteur est parallèle à la tangente à la trajectoire du point A ; ses projections sur les axes Or, Op dirigés suivant OA et suivant la perpendiculaire à OA dans le plan tangent au cône engendré par ce vecteur sont respectivement égales à $\frac{dr}{dt}$ et $r\frac{d\sigma}{dt}$.

Fig. 20.

22. Moment de la vitesse par rapport à un axe. Vitesse aréolaire. — Le moment par rapport à l'origine de la vitesse $\overrightarrow{V}$ d'un mobile est un vecteur ayant pour projections sur les axes

$$L = y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}, \qquad M = z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}, \qquad N = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt},$$

ces projections étant les moments de $\overrightarrow{V}$ par rapport aux axes ; on peut leur donner une signification géométrique.

Considérons le moment par rapport à Oz ; en introduisant les coordonnées polaires r, θ de la projection du mobile sur le plan Oxy, on a

$$N = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\theta}{dt} ;$$

nous trouvons ainsi le double de la dérivée de l'aire A du secteur engendré par le rayon vecteur r, dérivée que l'on appelle *vitesse* aréolaire et que l'on désigne par $\frac{dA}{dt}$; on peut donc énoncer ce théorème :

Le moment par rapport à un axe de la vitesse d'un mobile est égal au double de la vitesse aréolaire de la projection de ce mobile sur un plan perpendiculaire à l'axe.

CHAPITRE III

ACCÉLÉRATION

23. Accélération. Hodographe. — Plaçons-nous d'abord dans le cas d'un mouvement rectiligne et prenons la trajectoire comme axe Ox ; à chaque instant, la vitesse du mobile est égale à $\frac{dx}{dt}$. Si l'on envisage la loi du mouvement, le mouvement le plus simple après le mouvement uniforme est celui dont la vitesse varie de quantités égales dans des temps égaux ; la quantité dont elle varie dans l'unité de temps s'appelle *accélération* et le mouvement est dit *uniformément varié*.

Le mouvement d'équation $x = a + bt + ct^2$ est uniformément varié, car la vitesse $v = b + 2ct$ varie de quantités égales dans des temps égaux, en particulier de $2c$ pendant l'unité de temps ; inversement, un mouvement rectiligne uniformément varié dont on donne l'accélération γ est tel que sa vitesse est $v = v_0 + \gamma t$, v_0 étant la vitesse initiale, et que la loi du mouvement est $x = x_0 + v_0 t + \frac{\gamma t^2}{2}$, x_0 étant l'abscisse initiale.

Si un mouvement rectiligne n'est pas uniformément varié, on appelle *accélération moyenne* entre les instants t et t' celle d'un mobile auxiliaire animé d'un mouvement uniformément varié et possédant les mêmes vitesses v et v' que le mobile donné aux instants t et t' ; cette accélération moyenne est égale à $\frac{v' - v}{t' - t}$. On appelle accélération à l'instant t la limite de l'accélération moyenne quand l'intervalle $t' - t$ tend vers zéro ; elle est égale à la dérivée $\frac{dv}{dt}$ de la vitesse, et par suite à la dérivée seconde $\frac{d^2x}{dt^2}$ de l'abcisse ; on la représente ordinairement par γ.

Exemple : pour un mouvement vibratoire simple représenté par $x = a \cos \omega t$, on a

$$v = \frac{dx}{dt} = - a\omega \sin \omega t, \qquad \gamma = \frac{d^2x}{dt^2} = - a\omega^2 \cos \omega t = - \omega^2 x$$

L'accélération a pour dimension $\left[\frac{L}{T^2}\right]$; généralement elle est évaluée en mètre ou en centimètre par seconde carrée. Le diagramme de l'accélération se déduit de celui de la vitesse comme celui-ci se déduit du diagramme de la loi du mouvement.

On représente l'accélération par un vecteur lié au mobile, porté par la droite qui est sa trajectoire et ayant γ pour valeur relative.

Lorsque le mouvement n'est pas rectiligne, les considérations précédentes ne suffisent plus ; on définit alors l'accélération comme un vecteur de la façon suivante : soient aux instants t et t' $\overrightarrow{AV}$ et $\overrightarrow{A'V'}$ les vecteurs représentatifs de la vitesse, tangents à la trajectoire (*fig.* 21) ; on construit le vecteur issu de A et égal à leur différence géométrique $\overrightarrow{A'V'} - \overrightarrow{AV}$. Le quotient de cette différence par $t' - t$ est un vecteur $\overrightarrow{AJ_m}$ qu'on appelle accélération moyenne, et la limite $\overrightarrow{AJ}$ de ce vecteur quand $t' - t$ tend vers zéro s'appelle vecteur accélération à l'instant t et on le représente encore par $\vec{\gamma}$. Dans le cas d'un mouvement rectiligne, la valeur relative de ce vecteur est bien égale à la dérivée seconde de l'abscisse.

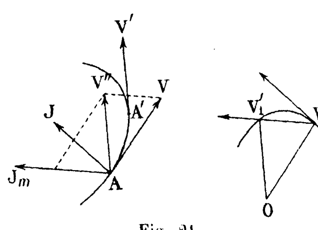


Fig. 21.

La détermination de l'accélération dans le cas général résulte de la considération de l'*hodographe*. On appelle ainsi le lieu de l'extrémité d'un vecteur $\overrightarrow{OV_1}$ issu d'un point fixe O, par exemple de l'origine, est équipollent au vecteur vitesse $\overrightarrow{AV}$. La différence géométrique entre $\overrightarrow{A'V'}$ et $\overrightarrow{AV}$ est équipollente à la différence géométrique entre les vecteurs $\overrightarrow{OV'_1}$ et $\overrightarrow{OV_1}$ correspondants ; l'accélération moyenne $\overrightarrow{AJ_m}$ est équipollente à $\frac{\overrightarrow{OV'_1} - \overrightarrow{OV_1}}{t' - t}$, et l'accélération $\overrightarrow{AJ}$ est équipollente à la dérivée géométrique du vecteur $\overrightarrow{OV_1}$.

On voit que l'accélération se déduit de l'hodographe comme la vitesse se déduit de la trajectoire ; on détermine le vecteur vitesse du point qui décrit l'hodographe, et on mène par le point A un vecteur équipollent à cette vitesse. On déduit de là les projections sur les axes du vecteur $\vec{\gamma}$ ou $\overrightarrow{AJ}$; comme les coordonnées de V_1 sont $x_1 = \frac{dx}{dt}$, $y_1 = \frac{dy}{dt}$, $z_1 = \frac{dz}{dt}$, les projections du vecteur accélération sont

$$(1) \qquad \gamma_x = \frac{dx_1}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \gamma_y = \frac{dy_1}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad \gamma_z = \frac{dz_1}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

On peut remarquer d'après cela que la projection du vecteur accélération sur

un plan ou sur un axe est identique au vecteur accélération de la projection du mouvement du mobile sur ce plan ou sur cet axe.

24. Composantes tangentielle et normale de l'accélération. — Le vecteur accélération AJ n'est pas porté en général par la tangente à la trajectoire ; il est dans le plan limite du plan AVV″ passant par la tangente AV et parallèle à la tangente voisine A′V′ ; ce plan limite n'est autre que le plan osculateur à la trajectoire ; de plus, par construction, le vecteur accélération est situé par rapport à la tangente AV du même côté que le centre de courbure, c'est-à-dire dans la concavité de la courbe.

La détermination intrinsèque de l'accélération consiste dans la recherche de ses projections sur la tangente à la trajectoire dans le sens des arcs croissants, et sur la normale principale vers le centre de courbure ; on les obtient en remarquant qu'elles sont équipollentes aux projections sur les axes que nous avons appelés OI, OD (n° 20) de la vitesse du point V_1 de l'hodographe. Nous avons vu que ces dernières sont égales à $\frac{dr}{dt}$ et à $r\frac{d\sigma}{dt} = r\frac{d\sigma}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$; ici r est égal à la vitesse v, par suite la projection γ_t de l'accélération sur la tangente est égale à $\frac{dv}{dt}$ ou à $\frac{d^2s}{dt^2}$; de plus le rapport $\frac{d\sigma}{ds}$ est égal à la courbure de la trajectoire, ou à $\frac{1}{\rho}$, en désignant par ρ le rayon de courbure de cette courbe ; la projection γ_n de l'accélération sur la normale principale est égale à $v\frac{d\sigma}{dt}$, ou à $v\frac{d\sigma}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v^2\frac{d\sigma}{ds} = \frac{v^2}{\rho}\cdot$ Enfin si l'on ajoute que la projection γ_b de l'accélération sur la binormale est nulle, on peut dire que les projections du vecteur accélération sur la tangente, la normale principale et la binormale à la trajectoire en A, sont

$$\gamma_t = \frac{dv}{dt}, \qquad \gamma_n = \frac{v^2}{\rho}, \qquad \gamma_b = 0. \tag{2}$$

On arrive au même résultat en utilisant les formules de Frenet. Si $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sont les cosinus directeurs de la tangente à la trajectoire $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ ceux de la normale principale, les projections de la vitesse sur les trois axes sont

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_1 v, \qquad \frac{dy}{dt} = \beta_1 v, \qquad \frac{dz}{dt} = \gamma_1 v,$$

celles de l'accélération sont les dérivées de ces quantités, c'est-à-dire

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha_1\frac{dv}{dt} + v\frac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_1\frac{dv}{dt} + v\frac{d\alpha_1}{ds}\cdot\frac{ds}{dt},$$

et de même des autres ; comme on a $\frac{d\alpha_1}{ds} = \frac{\alpha_2}{\rho}$, on voit que

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha_1 \frac{dv}{dt} + \alpha_2 \frac{v^2}{\rho},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \beta_1 \frac{dv}{dt} + \beta_2 \frac{v^2}{\rho},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \gamma_1 \frac{dv}{dt} + \gamma_2 \frac{v^2}{\rho} ;$$

ces expressions montrent que le vecteur accélération est la somme géométrique de deux autres, l'un égal à $\frac{dv}{dt}$ porté par la droite de direction $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, l'autre égal à $\frac{v^2}{\rho}$ porté par la droite de direction $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, ce qu'il fallait démontrer.

Les cas simples que l'on peut envisager sont ceux où l'accélération est purement tangentielle ou purement normale. Dans le premier cas, on doit avoir $\gamma_n = 0$, d'où $v = 0$ ou bien $\rho = \infty$; ce dernier cas se présente en particulier lorsque le point A est un point d'inflexion d'une ligne plane. Pour que γ_n soit nul, c'est-à-dire ρ infini, en tous les points, il faut et il suffit que la trajectoire soit une droite, comme il est facile de le voir.

Dans le deuxième cas, on doit avoir $\gamma_t = \frac{dv}{dt} = 0$; la vitesse doit être constante et le mouvement doit être uniforme.

Comme autre exemple, si l'on considère un mouvement circulaire sur un cercle de rayon r, on a

$$v = \omega r, \qquad \gamma_t = r\frac{d\omega}{dt}, \qquad \gamma_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r.$$

25. Accélération en coordonnées polaires. — Nous supposons qu'un mouvement plan est défini par la variation en fonction du temps des coordonnées polaires r et θ ; nous allons déterminer les projections de l'accélération sur le rayon vecteur et la perpendiculaire au rayon vecteur, que nous avons introduits au n° 20 sous le nom d'axes Or, Op.

Nous avons à déterminer les projections sur ces axes de la vitesse du point W de l'hodographe (*fig*. 20) ; elles sont égales à la somme des projections sur ces mêmes axes des vitesses des projections R et P de W sur Or et Op.

Le point R est l'extrémité d'un vecteur égal à $r_1 = \frac{dr}{dt}$ porté par Or ; les projections de sa vitesse sur Or et Op (formule 6, n° 20) sont

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}, \qquad r_1\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}.$$

Le point P est l'extrémité d'un vecteur égal à $r_2 = r\frac{d\theta}{dt}$ porté par Op ; les projections de sa vitesse sur Op et Or' faisant avec Op l'angle $\frac{\pi}{2}$ sont

$$\frac{dr_2}{dt} = \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}, \qquad r_2\frac{d\theta}{dt} = r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Comme Or' est opposé à Or, on voit, en additionnant les projections, que les composantes de l'accélération sont

$$(3) \qquad \gamma_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \qquad \gamma_p = 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

On aurait pu aboutir à ce résultat en projetant γ_x et γ_y sur Or et Op, ce qui donne

$$\gamma_r = \frac{d^2x}{dt^2}\cos\theta + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\theta, \qquad \gamma_p = -\frac{d^2x}{dt^2}\sin\theta + \frac{d^2y}{dt^2}\cos\theta,$$

et en remplaçant x et y par $r\cos\theta$ et $r\sin\theta$. Il est avantageux de mettre γ_p sous une autre forme, que l'on obtient rapidement en remarquant que

$$\gamma_p = \frac{1}{r}\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right),$$

et comme on a vu (nº 22) que $x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\theta}{dt}$, on a

$$(4) \qquad \gamma_p = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right),$$

résultat qui coïncide avec celui des formules (3).

L'égalité

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$$

et celles qu'on en déduit par permutation des lettres x, y, z permettent d'énoncer le théorème suivant :

Le moment par rapport à un point ou à un axe de l'accélération d'un point mobile est égal à la dérivée par rapport au temps du moment de sa vitesse par rapport à ce point ou à cet axe.

26. Applications géométriques. — Celle des relations (2) qui existe entre γ_n et le rayon de courbure ρ de la trajectoire d'un point permet inversement de déterminer ce rayon de courbure lorsqu'on connaît la vitesse et la composante normale de l'accélération de ce point.

Pour donner un exemple, considérons dans un plan vertical rapporté a deux axes Ox horizontal et Oy vertical vers le bas, le mouvement défini par les équations

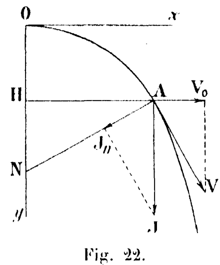


Fig. 22.

$$x = v_0 t, \qquad y = \frac{1}{2} g t^2,$$

où v_0 est une constante ; c'est, dans un cas particulier, le mouvement d'un point matériel pesant. La trajectoire est une parabole d'équation $x^2 = \frac{2v_0^2}{g} y$, dont le paramètre est $p = \frac{v_0^2}{g}$ (*fig.* 22). La vitesse et l'accélération du point sont données par

$$v_x = v_0, \qquad v_y = gt, \qquad \gamma_x = 0, \qquad \gamma_y = g ;$$

il en résulte que l'accélération $\overrightarrow{AJ}$ est constante et parallèle à Oy.

Soit $\overrightarrow{AJ_n}$ sa composante suivant la normale AN et soit H la projection du mobile A sur l'axe Oy ; la sous-normale HN est égale au paramètre. Les triangles semblables donnent

$$\frac{AJ_n}{AJ} = \frac{AV_0}{AV} = \frac{HN}{AN}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\gamma_n}{g} = \frac{v_0}{v} = \frac{p}{N},$$

en désignant AN par N. L'égalité $\rho = \frac{v^2}{\gamma_n}$ nous donne par suite

$$\rho = \frac{v_0^2}{g} \cdot \frac{N^3}{p^3} = \frac{N^3}{p^2} ;$$

c'est la valeur du rayon de courbure en un point d'une parabole quelconque en fonction de la normale et du paramètre.

Comme autre exemple, considérons un mouvement hélicoïdal uniforme défini par les équations

$$r = c^{te}, \qquad \theta = \omega t, \qquad z = k\theta ;$$

les composantes de la vitesse et de l'accélération sur les axes Or, Op du plan xy et sur l'axe Oz sont

$$v_r = 0, \qquad v_p = r\omega, \qquad v_z = k\omega,$$
$$\gamma_r = - r\omega^2, \qquad \gamma_p = 0, \qquad \gamma_z = 0.$$

L'accélération est donc dirigée suivant la perpendiculaire abaissée du mobile sur l'axe Oz ; sa projection sur la tangente à la courbe est nulle ; il en résulte que l'accélération se réduit à sa composante normale et que sa direc-

tion est confondue avec celle de la normale principale à la courbe ; celle-ci est donc dirigée suivant la perpendiculaire abaissée du point sur l'axe du cylindre. La composante γ_n est en valeur absolue égale à $r\omega^2$; en écrivant qu'elle est égale à $\frac{v^2}{\rho}$, on trouve

$$\rho = \frac{v^2}{\gamma_n} = \frac{(r^2 + h^2)\omega^2}{r\omega^2} = r + \frac{h^2}{r}.$$

CHAPITRE IV

CINÉMATIQUE DES SOLIDES INVARIABLES

27. Translation. Rotation. — Nous considérons un solide invariable S (formé par un système de points matériels dont les distances mutuelles sont invariables) et lié à un trièdre $Oxyz$ en mouvement par rapport à un solide invariable S_1 lié à un trièdre $O_1x_1y_1z_1$ que nous appelons trièdre fixe. Avant d'aborder l'étude du mouvement le plus général, nous envisagerons les cas simples de la translation, de la rotation et du mouvement hélicoïdal.

1° On dit qu'un solide est animé d'un mouvement de *translation* si la droite qui joint deux points quelconques de ce solide reste constamment parallèle à elle-même; on démontre en géométrie élémentaire qu'il faut et suffit que cela ait lieu pour trois points particuliers quelconques non en ligne droite. Les vitesses et les accélérations de deux points quelconques sont manifestement des vecteurs équipollents : il suffit dès lors de connaître le mouvement d'un point tel que A (*fig.* 23) pour avoir le mouvement d'un autre point quelconque tel que B.

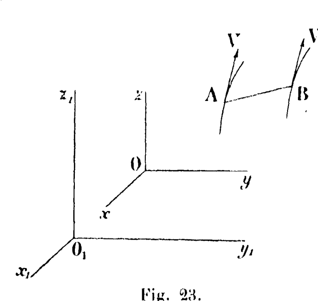


Fig. 23.

Si à l'instant initial le trièdre mobile $Oxyz$ est pris parallèle au trièdre fixe $O_1x_1y_1z_1$, il lui reste parallèle dans la suite du temps; si l'on désigne par x_0, y_0, z_0 les coordonnées dans le trièdre fixe de l'origine O, coordonnées variables avec le temps, et si l'on désigne par x, y, z celles invariables d'un point tel que A dans le trièdre mobile, les formules de transformation

$$x_1 = x_0 + x, \qquad y_1 = y_0 + y, \qquad z_1 = z_0 + z$$

permettent d'affirmer que les dérivées de tous ordres de x_1, y_1, z_1 sont les mêmes que celles de x_0, y_0, z_0; c'est une nouvelle démonstration de la propriété, déjà énoncée, des vitesses et des accélérations.

2° On dit qu'un solide invariable est animé d'un mouvement de *rotation* si les points d'une droite de ce solide restent fixes ; il faut et il suffit que cela ait lieu pour deux points de cette droite, que l'on appelle axe de rotation. Tout autre point du solide décrit un cercle dont le centre est sur l'axe et le plan perpendiculaire à l'axe. Le mouvement du solide est complètement déterminé par le déplacement angulaire θ du rayon relatif à un point quelconque ; la vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ est la même pour tous les points. La vitesse d'un point A situé à la distance r de l'axe (*fig.* 24) est égale à ωr et est tangente au cercle décrit par A ; les composantes de son accélération sont $r\frac{d\omega}{dt}$ suivant la tangente et $\omega^2 r$ suivant le rayon dirigé de A vers le centre C du cercle.

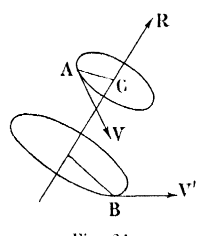


Fig. 24.

Exemple. — Considérons le mouvement de rotation diurne de la Terre autour de sa ligne des pôles ; prenons comme repère fixe un trièdre dont l'origine est au centre de la Terre, un axe confondu avec la ligne des pôles et les deux autres dirigés vers des étoiles fixes ; l'angle θ varie de 2π en un jour sidéral, qui est plus court que le jour moyen de $3^{mn}55^{s},91$ et vaut

$$24 \times 3600 - 3 \times 60 - 55,91 = 86400 - 235,91 = 86114,91 \text{ secondes ;}$$

la vitesse angulaire est $\omega = 0,0000729$; la vitesse d'un point de l'équateur, dont le rayon est 6378253 mètres est égale à $\omega r = 465 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; l'accélération de ce point est dirigée vers le centre et est égale à $\omega^2 r = 0,0339 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

On représente la vitesse angulaire de rotation ω par un vecteur glissant $\vec{R}$ égal à ω, porté par l'axe de rotation dans un sens tel qu'un observateur placé sur $\vec{R}$ voie le mouvement s'effectuer dans le sens positif. L'utilité de cette représentation résulte de ce théorème fondamental :

Le vecteur vitesse d'un point A *est égal au moment par rapport à ce point du vecteur* $\vec{R}$ *représentatif de la vitesse angulaire* ω.

Il suffit pour le voir de remarquer que le vecteur vitesse $\vec{V}$ est égal à ω . AC, est perpendiculaire au plan ACR, et a le sens du moment de $\vec{R}$. Ce théorème permet d'évaluer les projections du vecteur vitesse sur les axes fixes ou sur les axes mobiles ; nous rappelons pour cela les formules du n° 2 donnant

les projections sur les axes $Oxyz$ du moment par rapport à un point (x_0, y_0, z_0) du vecteur (X, Y, Z) issu du point (x, y, z) :

$$\begin{aligned} L' &= (y - y_0)Z - (z - z_0)Y, \\ M' &= (z - z_0)X - (x - x_0)Z, \\ N' &= (x - x_0)Y - (y - y_0)X. \end{aligned}$$

Nous supposerons que l'origine O du trièdre mobile est un point de l'axe de rotation ; nous désignerons par p, q, r les projections du vecteur $\vec{R}$ sur les axes $Oxyz$, par p_1, q_1, r_1 ses projections sur les axes fixes $O_1x_1y_1z_1$, par x_0, y_0, z_0 les coordonnées de O par rapport à ces derniers axes ; par x, y, z et x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un point A dans l'un et l'autre système. Pour appliquer les formules précédentes aux axes mobiles, nous devons remplacer X, Y, Z par p, q, r, x, y, z par zéro et x_0, y_0, z_0 par x, y, z, ce qui donne les formules

$$(1) \quad \begin{cases} v_x = qz - ry, \\ v_y = rx - pz, \\ v_z = py - qx. \end{cases}$$

Pour appliquer les mêmes formules aux axes fixes, nous devons remplacer X, Y, Z par p_1, q_1, r_1, x, y, z par x_0, y_0, z_0 et x_0, y_0, z_0 par x_1, y_1, z_1 ; ce qui donne les formules

$$(2) \quad \begin{cases} v_{x_1} = q_1(z_1 - z_0) - r_1(y_1 - y_0), \\ v_{y_1} = r_1(x_1 - x_0) - p_1(z_1 - z_0), \\ v_{z_1} = p_1(y_1 - y_0) - q_1(x_1 - x_0). \end{cases}$$

Les cas particuliers sont :

a) celui où les deux trièdres ont la même origine prise sur l'axe ; il suffit de faire nuls x_0, y_0, z_0, de sorte que les formules (2) prennent le même aspect que (1) ;

b) celui où l'axe de rotation est parallèle à Oz ; on a alors $p = p_1 = 0$, $q = q_1 = 0$, $r = r_1 = \omega$ et les formules deviennent

$$(3) \qquad v_x = -\omega y, \qquad v_y = \omega x, \qquad v_z = 0 ;$$

$$(4) \qquad v_{x_1} = -\omega(y_1 - y_0), \qquad v_{y_1} = \omega(x_1 - x_0), \qquad v_{z_1} = 0 ;$$

c) celui où les deux axes Oz, O_1z_1 sont confondus suivant l'axe de rotation ; x_0 et y_0 sont alors nuls, et les formules (4) prennent la même forme que (3). On peut ajouter dans ce cas que les projections sur les axes fixes de l'accélération du point A sont

$$(5) \quad \begin{cases} \gamma_{x_1} = \dfrac{d}{dt}v_{x_1} = -\dfrac{d\omega}{dt}y_1 - \omega\dfrac{dy_1}{dt} = -\dfrac{d\omega}{dt}y_1 - \omega^2 x_1, \\ \gamma_{y_1} = \dfrac{d}{dt}v_{y_1} = \dfrac{d\omega}{dt}x_1 + \omega\dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{d\omega}{dt}x_1 - \omega^2 y_1, \\ \gamma_{z_1} = 0 ; \end{cases}$$

on aurait pu du reste les obtenir en projetant sur les axes $Ox_1y_1z_1$ les composantes $r\frac{d\omega}{dt}$ et $-\omega^2 r$ de l'accélération suivant les axes Or, Op.

28. Mouvement hélicoïdal. — 3° On dit qu'un solide invariable est animé d'un mouvement *hélicoïdal* si une droite du système reste toujours confondue avec elle-même, en glissant sur sa propre direction, et si le déplacement angulaire du solide autour de cette droite est proportionnel au glissement d'un point de cette même droite, appelée *axe de rotation et de glissement.*

Les projections sur cet axe des mouvements de tous les points sont identiques et ont la même vitesse v_g ; les projections de ces mouvements sur un plan perpendiculaire à l'axe sont des rotations ayant la même vitesse angulaire ω ; les trajectoires des points sont des hélices de même pas tracées sur des cylindres ayant pour axe l'axe de rotation et glissement.

La vitesse d'un point A, tangente à l'hélice qu'il décrit (*fig.* 25), est la somme géométrique de ses deux composantes, respectivement égales aux vitesses v_g et ωr des projections de son mouvement sur l'axe et sur un plan perpendiculaire à l'axe. On représente les vitesses v_g et ω par des vecteurs $\vec{G}$ et $\vec{R}$ portés par l'axe ; la vitesse $\vec{V}$ de A est alors la somme géométrique d'un vecteur $\vec{Ag'}$ équipollent à $\vec{G}$ et d'un autre vecteur $\vec{Ag''}$ égal au moment de $\vec{R}$ par rapport à A. Or cette construction est identique à celle qui donne le moment résultant par rapport à un point d'un système de vecteurs dont $\vec{R}$ est la résultante générale et G le moment résultant par rapport à un point de l'axe. On peut donc énoncer le théorème suivant :

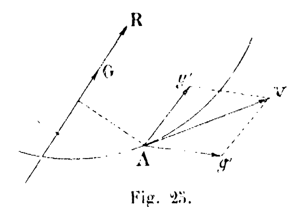


Fig. 25.

Le vecteur vitesse d'un point A dans un mouvement hélicoïdal est égal au moment résultant par rapport à ce point A du système de vecteurs dont la résultante générale et le moment résultant sont égaux à ω et v_g, portés par l'axe de rotation et glissement. Cet axe est l'axe central du système de vecteurs.

Les formules développées dans le n° précédent donnent les projections sur les axes de la composante v_r ; il suffit de leur ajouter les projections de v_g.

29. Mouvement général d'un solide invariable. — Nous allons montrer que l'étude de ce mouvement pendant un intervalle de temps infiniment petit à partir d'un instant quelconque se ramène à l'un des trois cas précédents,

dont le troisième comprend les deux autres comme cas particuliers ; la démonstration peut se faire soit par des raisonnements géométriques sur des déplacements finis, soit par le calcul ; nous adopterons cette dernière méthode et nous démontrerons le théorème suivant :

Les vitesses de tous les points d'un solide invariable sont à chaque instant les mêmes que dans un mouvement de translation, ou un mouvement de rotation ou un mouvement hélicoïdal.

Un premier cas simple est celui où trois points A, B, C du solide, non en ligne droite, sont tels que les droites AB, AC restent constamment parallèles à elles-mêmes pendant le mouvement ; celui-ci est alors une translation.

Un deuxième cas est celui où un point O du solide reste fixe ; nous allons montrer que les vitesses des autres points à un instant sont les mêmes que dans une rotation autour d'un axe passant par le point fixe. Nous prendrons ce point comme origine, nous rapporterons le système invariable à trois axes $Oxyz$ qui lui sont liés, et qui sont mobiles dans un système fixe rapporté à trois axes $Ox_1y_1z_1$; nous désignerons les cosinus directeurs des axes mobiles par les lettres du tableau

$$(6)\qquad \begin{array}{c|ccc} & x_1 & y_1 & z_1 \\ \hline x & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ y & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ z & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{array} ;$$

ce sont des fonctions données du temps. Entre les coordonnées x, y, z, x_1, y_1, z_1 d'un point A du solide existent les relations

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, & x &= \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1, \\ y_1 &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, & y &= \alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1 + \gamma_2 z_1, \\ z_1 &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z, & z &= \alpha_3 x_1 + \beta_3 y_1 + \gamma_3 z_1 ; \end{aligned}$$

les projections de la vitesse du point A sur les axes fixes sont les dérivées de y_1, x_1, z_1 en remarquant que x, y, z sont des constantes ; elles sont

$$(7)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{d\alpha_1}{dt}x + \frac{d\alpha_2}{dt}y + \frac{d\alpha_3}{dt}z, \\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{d\beta_1}{dt}x + \frac{d\beta_2}{dt}y + \frac{d\beta_3}{dt}z, \\ \frac{dz_1}{dt} &= \frac{d\gamma_1}{dt}x + \frac{d\gamma_2}{dt}y + \frac{d\gamma_3}{dt}z. \end{aligned} \right.$$

Nous les exprimerons en fonction de x_1, y_1, z_1 en remplaçant dans les seconds membres x, y, z par leurs valeurs, ce qui donne des expressions de la

forme

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1,$$
$$\frac{dy_1}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1,$$
$$\frac{dz_1}{dt} = a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1,$$

où les coefficients ont les valeurs

$$a_{11} = \alpha_1\frac{d\alpha_1}{dt} + \alpha_2\frac{d\alpha_2}{dt} + \alpha_3\frac{d\alpha_3}{dt}, \qquad a_{12} = \beta_1\frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_2\frac{d\alpha_2}{dt} + \beta_3\frac{d\alpha_3}{dt}, \ \ldots\ldots$$
$$a_{21} = \alpha_1\frac{d\beta_1}{dt} + \alpha_2\frac{d\beta_2}{dt} + \alpha_3\frac{d\beta_3}{dt}, \qquad a_{22} = \beta_1\frac{d\beta_1}{dt} + \beta_2\frac{d\beta_2}{dt} + \beta_3\frac{d\beta_3}{dt}, \ \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

nous allons voir que ces coefficients satisfont aux conditions

$$(8) \qquad a_{ii} = 0, \qquad a_{ij} + a_{ji} = 0, \qquad (i, j = 1, 2, 3);$$

il suffit pour cela d'utiliser les relations telles que

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \qquad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0$$

et d'en prendre la dérivée pour voir que $a_{11} = 0$, $a_{12} + a_{21} = 0$ et de même des autres. Si l'on pose alors

$$p_1 = a_{32} = -a_{23}, \qquad q_1 = a_{13} = -a_{31}, \qquad r_1 = a_{21} = -a_{12},$$

on voit que les projections de la vitesse sont

$$v_{x_1} = q_1z_1 - r_1y_1, \qquad v_{y_1} = r_1x_1 - p_1z_1, \qquad v_{z_1} = p_1y_1 - q_1x_1,$$

et qu'elles ont précisément la forme (2) caractéristique de la vitesse dans un mouvement de rotation ; le théorème est ainsi démontré, et le vecteur vitesse angulaire $\vec{R}$ est déterminé par cela même, ses projections sur les axes fixes étant p_1, q_1, r_1.

On peut calculer les projections p, q, r de ce même vecteur sur les axes mobiles en projetant sur ces axes soit le vecteur (p_1, q_1, r_1) soit le vecteur vitesse, d'après les formules

$$v_x = \alpha_1 v_{x_1} + \beta_1 v_{y_1} + \gamma_1 v_{z_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

un calcul analogue au précédent donnerait pour v_x, v_y, v_z des expressions de la forme (1).

Plaçons-nous maintenant dans le cas général ; le mouvement du solide est déterminé dès que l'on donne en fonction du temps les coordonnées x_0, y_0, z_0

de l'origine du trièdre $Oxyz$, et les cosinus directeurs des arêtes de ce trièdre, cosinus que nous désignerons par les mêmes lettres que dans le cas précédent ; les coordonnées x_1, y_1, z_1 d'un point A (x, y, z) sont données par les formules de transformation

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \\ y_1 &= y_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \\ z_1 &= z_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z, \end{aligned}$$

dont les inverses sont

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1(x_1 - x_0) + \beta_1(y_1 - y_0) + \gamma_1(z_1 - z_0), \\ y &= \alpha_2(x_1 - x_0) + \beta_2(y_1 - y_0) + \gamma_2(z_1 - z_0), \\ z &= \alpha_3(x_1 - x_0) + \beta_3(z_1 - z_0) + \gamma_3(z_1 - z_0). \end{aligned}$$

Les projections de la vitesse de A sur les axes fixes sont

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dx_0}{dt} + \frac{d\alpha_1}{dt}x + \frac{d\alpha_2}{dt}y + \frac{d\alpha_3}{dt}z, \\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{dy_0}{dt} + \frac{d\beta_1}{dt}x + \frac{d\beta_2}{dt}y + \frac{d\beta_3}{dt}z, \\ \frac{dz_1}{dt} &= \frac{dz_0}{dt} + \frac{d\gamma_1}{dt}x + \frac{d\gamma_2}{dt}y + \frac{d\gamma_3}{dt}z ; \end{aligned}$$

en remplaçant x, y, z par leurs valeurs, on les mettra sous la forme

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + a_{11}(x_1 - x_0) + a_{12}(y_1 - y_0) + a_{13}(z_1 - z_0),$$

. . . .

les coefficients a_{ij} ayant les valeurs données précédemment et satisfaisant aux mêmes relations (8). Nous introduirons les nombres p_1, q_1, r_1 égaux à a_{32}, a_{13}, a_{21} et nous aurons finalement

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dx_0}{dt} + q_1(z_1 - z_0) - r_1(y_1 - y_0), \\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{dy_0}{dt} + r_1(x_1 - x_0) - p_1(z_1 - z_0), \\ \frac{dz_1}{dt} &= \frac{dz_0}{dt} + p_1(y_1 - y_0) - q_1(x_1 - x_0) ; \end{aligned}$$

ces formules montrent que le vecteur vitesse $\vec{V}$ de A (*fig.* 26) est la résultante de deux autres, l'un $\vec{V_0'}$ équipollent à la vitesse $\vec{V_0}$ de O, l'autre $\vec{V_r}$ identique, d'après les formules (2), à la vitesse de A dans une rotation autour d'un axe passant par A, le vecteur $\vec{R}$ représentatif de la vitesse angulaire étant porté par cet axe, sa grandeur ω ayant pour projection p_1, q_1, r_1. Il serait facile de

calculer les projections v_x, v_y, v_z de la vitesse de A sur les axes mobiles et de leur donner une forme analogue aux précédentes.

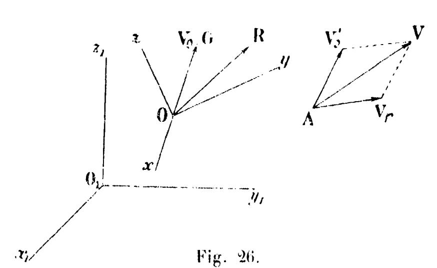


Fig. 26.

Ce que nous avons dit dans la théorie des vecteurs nous permet d'énoncer ces résultats sous la forme du théorème suivant :

En considérant la vitesse $\overrightarrow{V_0}$ du point O comme un vecteur moment $\overrightarrow{OG}$ par rapport à ce point O, et la vitesse angulaire de rotation issue de O comme un vecteur résultante générale $\overrightarrow{OR}$ appliqué en ce point, la vitesse d'un point quelconque A est représentée par le vecteur moment par rapport à ce point A du système caractérisé par $\overrightarrow{OR}$ et $\overrightarrow{OG}$.

On peut ajouter que si l'on rapportait le solide mobile à d'autres axes passant par un point O', on obtiendrait les vecteurs $\overrightarrow{O'R'}$, $\overrightarrow{O'G'}$ relatifs à ce point en appliquant à $\overrightarrow{OR}$ et $\overrightarrow{OG}$ le théorème du transport ; on voit en particulier que la vitesse angulaire de rotation est en grandeur et en direction indépendante des axes liés au solide mobile.

Ce que nous avons dit aux n°s 7 et 9 sur la classification des systèmes de vecteurs s'applique au cas actuel en remplaçant X, Y, Z par p_1, q_1, r_1 et L', M', N' par $v_{0x} = \frac{dx_0}{dt}$, $v_{0y} = \frac{dy_0}{dt}$, $v_{0z} = \frac{dz_0}{dt}$; les invariants du système sont la longueur de $\overrightarrow{R}$ égale à $\omega = \sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2}$ et la projection de $\overrightarrow{OG}$ sur $\overrightarrow{OR}$ égale à

$$\frac{p_1 \frac{dx_0}{dt} + q_1 \frac{dy_0}{dt} + r_1 \frac{dz_0}{dt}}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2}} ;$$

tous les cas possibles rentrent dans les suivants :

1° les six quantités p_1, q_1, r_1, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} sont nulles à un instant ; la vitesse de tout point A est nulle à cet instant ;

2° p_1, q_1, r_1 sont nuls, et v_0 ne l'est pas ; la vitesse de tout point A est égale à $\overrightarrow{V_0}$; le solide est animé d'un mouvement de translation à l'instant considéré ;

3° la vitesse $\overrightarrow{V_0}$ est nulle ou perpendiculaire à $\overrightarrow{OG}$, ce qui est caractérisé par la condition

$$p_1 v_{0x} + q_1 v_{0y} + r_1 v_{0z} = 0 ;$$

le système est équivalent à un vecteur unique représentatif d'une rotation ; la

vitesse de tout point A est à l'instant considéré la même que dans une rotation. L'axe de cette rotation est l'axe central du système, et l'on obtient ses équations en écrivant que $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dy_1}{dt} = \frac{dz_1}{dt} = 0$;

4° dans les autres cas, le système est équivalent à une résultante $\overrightarrow{O'R'}$ et un moment résultant $\overrightarrow{O'G'}$ portés, par une même droite, l'axe central du système, dont les équations sont obtenues en écrivant que l'on a

$$\frac{\frac{dx_1}{dt}}{p_1} = \frac{\frac{dy_1}{dt}}{q_1} = \frac{\frac{dz_1}{dt}}{r_1};$$

à l'instant considéré, la vitesse de tout point A est la même que dans un mouvement hélicoïdal dont l'axe de rotation et de glissement est précisément l'axe central précédent, les vitesses correspondantes étant représentées par $\overrightarrow{O'R'}$ et $\overrightarrow{O'G'}$.

Le théorème que nous avons énoncé est ainsi démontré dans toute sa généralité ; il faut toutefois remarquer qu'il ne concerne que l'état des vitesses de tous les points A du solide à un instant donné, ou, ce qui revient au même, la nature du mouvement pendant un intervalle de temps infiniment petit à partir de cet instant considéré. On dit que le mouvement hélicoïdal ou l'une de ses dégénérescences déterminé par ce qui précède est le mouvement tangent au mouvement réel à cet instant. Ce mouvement, son axe et ses vitesses caractéristiques changent généralement d'instant en instant.

30. Mouvement d'un plan sur un plan. — Un cas particulier du mouvement général est celui où les points du solide mobile restent à des distances invariables d'un plan fixe ; on peut supposer que ce plan est le plan $O_1x_1y_1$, et tout revient à étudier le déplacement d'un solide aplati contenu dans un plan Oxy qui glisse sur le plan fixe. Ce que nous avons dit au n° précédent s'applique ici, et l'on peut voir qu'à chaque instant le mouvement tangent est une translation ou une rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan, mais il est plus simple de faire une étude directe du mouvement.

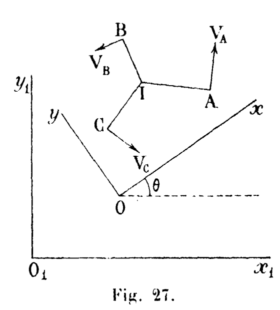


Fig. 27.

Soit (*fig.* 27) Oxy un système d'axes mobiles sur un plan fixe $O_1x_1y_1$; désignons par x_0, y_0 les coordonnées de l'origine O, par θ l'angle de Ox avec O_1x_1 ; un

point A de coordonnées constantes x, y a dans le système fixe des coordonnées données par les formules

$$(9)\quad \begin{cases} x_1 = x_0 + x\cos\theta - y\sin\theta, \\ y_1 = y_0 + x\sin\theta + y\cos\theta, \end{cases}$$

dont les formules inverses sont

$$(10)\quad \begin{cases} x = (x_1 - x_0)\cos\theta + (y_1 - y_0)\sin\theta, \\ y = -(x_1 - x_0)\sin\theta + (y_1 - y_0)\cos\theta. \end{cases}$$

En dérivant les premières, on obtient les projections de la vitesse de A sur les axes fixes

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_0}{dt} - (x\sin\theta + y\cos\theta)\frac{d\theta}{dt},$$
$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + (x\cos\theta - y\sin\theta)\frac{d\theta}{dt}.$$

En posant

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \qquad \frac{dx_0}{dt} = \frac{dx_0}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}, \qquad \frac{dy_0}{dt} = \frac{dy_0}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt},$$

et remplaçant les parenthèses par leurs valeurs en fonction de x_1, y_1, on obtient

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \omega\left[\dfrac{dx_0}{d\theta} - (y_1 - y_0)\right], \\ \dfrac{dy_1}{dt} = \omega\left[\dfrac{dy_0}{d\theta} + (x_1 - x_0)\right]. \end{cases}$$

On voit que la vitesse est nulle pour le point de coordonnées

$$(12)\qquad \xi_1 = x_0 - \frac{dy_0}{d\theta}, \qquad \eta_1 = y_0 + \frac{dx_0}{d\theta},$$

et que l'on a pour tout autre point

$$(13)\qquad \frac{dx_1}{dt} = -\omega(y_1 - \eta_1), \qquad \frac{dy_1}{dt} = \omega(x_1 - \xi_1);$$

ces formules sont identiques aux formules (4) du n° 27, et montrent que la vitesse du point A est celle qu'il aurait dans une rotation avec la vitesse angulaire ω autour du point (ξ_1, η_1). Ce point est appelé *centre instantané* de rotation ; nous le désignerons par I ; ses coordonnées dans le système Oxy se déduisent des formules (8) et sont

$$(14)\quad \begin{cases} \xi = -\dfrac{dy_0}{d\theta}\cos\theta + \dfrac{dx_0}{d\theta}\sin\theta, \\ \eta = \dfrac{dy_0}{d\theta}\sin\theta + \dfrac{dx_0}{d\theta}\cos\theta. \end{cases}$$

31. Applications mécaniques et géométriques. — A un instant donné, les vitesses de tous les points d'un solide aplati mobile dans son plan sont tangentes aux trajectoires de ces points, et, d'après ce qui précède, sont normales aux rayons issus du centre instantané de rotation. Nous en concluons inversement qu'à chaque instant les normales aux trajectoires des différents points sont concourantes au centre instantané.

La connaissance des tangentes aux trajectoires de deux points permet de déterminer le centre instantané, qui est l'intersection des normales en ces deux points, et d'en déduire les tangentes aux trajectoires des autres points. Cette remarque donne lieu à de nombreuses applications.

1° En mécanique, dès que l'on connaît la vitesse $\vec{V}_A$ d'un premier point A, et la direction de la vitesse d'un deuxième point B, on sait d'abord déterminer le centre instantané I (*fig.* 27), intersection des perpendiculaires en A et B aux directions des vitesses ; on en déduit la direction de la vitesse d'un point quelconque C en menant en ce point la perpendiculaire à IC. Quant aux vitesses elles-mêmes, elles sont proportionnelles aux rayons issus du centre I, et l'on a

$$\frac{v_A}{IA} = \frac{v_B}{IB} = \frac{v_C}{IC}. \tag{15}$$

Exemple. — Supposons qu'une bielle AB (*fig.* 28) soit entraînée par une manivelle OB de rayon r tournant autour du point O dans le sens des aiguilles d'une montre, tandis que A se déplace sur une droite D passant par O. Si à un instant donné ω est la vitesse angulaire de la manivelle, la vitesse du point B est égale à ωr et est tangente au cercle décrit par ce point ; on connaît de plus la direction D de la vitesse de A, par suite on peut tracer les normales aux trajectoires de A et B, dont la seconde est OB, et leur point de rencontre est le centre instantané I.

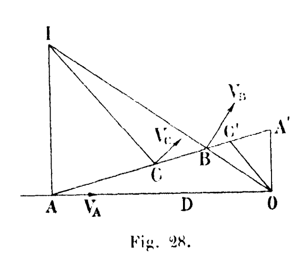


Fig. 28.

La vitesse d'un point quelconque C de la bielle est normale à IC ; quant aux grandeurs des vitesses, elles sont données par les égalités (15).

Si l'on désigne par A' le point où la normale menée par O à D rencontre la bielle ou son prolongement ; de même par C' le point où la bielle est rencontrée par la parallèle OC' à IC, point qui est encore donné par la relation

$$\frac{C'B}{C'A'} = \frac{CB}{CA},$$

les triangles semblables montrent que l'on a

$$\frac{IA}{OA'} = \frac{IB}{OB} = \frac{IC}{OC'},$$

et on en déduit

$$v_A = \omega . OA', \quad v_C = \omega . OC'.$$

Il serait facile de voir, à l'aide de triangles semblables, que les projections sur la droite AB des vitesses de tous les points de cette droite sont égales.

2° En géométrie, la durée des déplacements et la valeur numérique des vitesses n'ont pas d'importance, et l'on se propose uniquement de déterminer les tangentes aux trajectoires de certains points du système mobile. La connaissance des tangentes aux courbes décrites par deux points permet, à l'aide des normales, de trouver le centre instantané I, et d'en déduire les normales aux courbes décrites par les autres points.

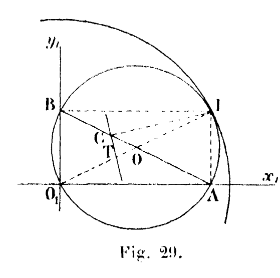


Fig. 29.

Exemple. — Si les extrémités d'une droite de longueur constante AB glissent sur deux axes rectangulaires O_1x_1, O_1y_1 (*fig.* 29), ces axes sont les trajectoires de ces points, et les normales se coupent au dernier sommet I du rectangle construit sur O_1A et O_1B. On sait qu'un point C de AB décrit une ellipse ; la normale à cette ellipse au point C est la droite IC, et l'on en déduit la tangente CT.

32. Base et roulante. — Le centre instantané de rotation varie généralement d'un instant à l'autre. Le lieu de ses positions successives dans le plan fixe est une ligne appelée *base,* et le lieu de ses positions dans le plan mobile est une autre ligne appelée *roulante.* Ces deux lignes sont représentées par les équations (11) et (12) qui donnent en même temps la variation, en fonction du temps, des positions du centre instantané.

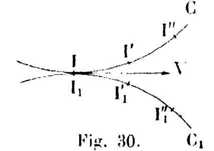


Fig. 30.

Soit, à un instant t (*fig.* 30), I le centre instantané considéré comme appartenant au plan mobile, I_1 le point coïncidant avec le premier, considéré comme appartenant au plan fixe et soient aux instants successifs t, t', t'', ... I, I', I'', ... les positions successives du centre instantané reportées sur la position initiale du plan mobile Oxy, et formant la courbe

roulante C. Soient I_1, I'_1, I''_1, ... les positions correspondantes du centre dans le système $O_1x_1y_1$ et formant la courbe base C_1. Nous allons démontrer le théorème suivant :

A un instant quelconque, la base et la roulante sont tangentes, le point de contact étant le centre instantané relatif à cet instant ; de plus les arcs décrits par le centre instantané sur la base et la roulante dans des temps égaux sont égaux.

Une démonstration simple est fondée sur la considération d'un point mobile auxiliaire A qui se trouve à chaque instant au centre instantané ; son mouvement peut être considéré comme résultant d'un mouvement relatif sur la roulante C, l'amenant en I, I', I'', ... aux instants t, t', t'', ... et d'un mouvement d'entraînement, celui du plan Oxy sur le plan $O_1x_1y_1$; le mouvement absolu résultant l'amène alors en I_1, I'_1, I''_1, ... sur la base aux instants successifs envisagés. Soient alors s et s_1 les arcs correspondants décrits sur les deux courbes.

La vitesse relative à l'instant t est tangente à C en I, et égale à $\frac{ds}{dt}$; la vitesse absolue est tangente à C_1 en I_1, et égale à $\frac{ds_1}{dt}$. Cette vitesse est la somme géométrique de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement, mais celle-ci est nulle (parce que le point coïncident est confondu avec le centre instantané de rotation), par suite les deux vitesses relative et absolue sont identiques et l'on voit : 1° que les tangentes aux deux courbes sont confondues ; 2° que $\frac{ds}{dt} = \frac{ds_1}{dt}$, d'où, par intégration, $s = s_1$ puisque s et s_1 sont nuls en même temps. Le théorème est donc démontré.

Il résulte de là que les deux courbes C et C_1 roulent l'une sur l'autre sans glissement dans la suite du temps, et que le mouvement d'un plan sur un plan peut être obtenu par roulement de la roulante sur la base. La réciproque est la suivante :

Si une courbe liée à un plan mobile roule sans glisser sur une courbe d'un plan fixe, le centre instantané de rotation est à chaque instant le point de contact des deux courbes. Il suffit pour le voir de reprendre en sens inverse le raisonnement précédent.

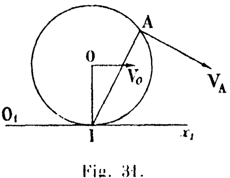


Fig. 31.

Exemples. — Dans le déplacement d'une droite AB dont les extrémités glissent sur deux axes fixes O_1x_1, O_1y_1 (*fig.* 29), le centre instantané I est le dernier sommet du rectangle construit sur O_1A et O_1B ; dans le plan fixe, ce point reste à une distance constante $O_1I = AB$ du point O_1, et la base est le cercle de centre O_1 et de rayon AB ; dans le plan

mobile, le point I est à une distance constante $OI = OA$ du milieu de AB, et la roulante est le cercle de diamètre AB ; le mouvement de AB peut être obtenu par le roulement du petit cercle à l'intérieur du grand de rayon double.

Comme autre exemple, si un cercle de centre O et de rayon r roule sans glisser sur une droite fixe O_1x_1 (*fig.* 31), le centre instantané I est le point de contact du cercle et de la droite ; la vitesse v_0 du centre, représentée par le vecteur $\overrightarrow{V_0}$, est liée à la vitesse de rotation ω par la relation $v_0 = \omega . IO = \omega r$; tout autre point A du cercle décrit une cycloïde, dont la normale est AI ; la vitesse de ce point, représentée par le vecteur $\overrightarrow{AV_A}$ perpendiculaire à IA, a pour valeur

$$v = \omega . IA = \frac{v_0 . IA}{r}.$$

Remarque. — Souvent on appelle *systèmes invariables* ce que nous désignons par *solides invariables* afin d'éviter la confusion avec les *systèmes de vecteurs*.

CHAPITRE V

COMPOSITION DES MOUVEMENTS

33. Composition des vitesses d'un point. — Nous avons déjà considéré au n° 18 le mouvement résultant d'un mouvement relatif et d'un mouvement d'entraînement ; nous allons reprendre cette question par le calcul. Nous supposons qu'un point A ait dans un système S rapporté à des axes $Oxyz$ un mouvement relatif défini par la variation des coordonnées x, y, z en fonction du temps, et que le système S ait dans un système S_1 rapporté à un trièdre $O_1x_1y_1z_1$ un mouvement d'entraînement défini par la variation en fonction du temps des coordonnées x_0, y_0, z_0 de O et des cosinus directeurs des axes mobiles, comme il est indiqué au n° 29. Le mouvement résultant, appelé encore mouvement absolu, est défini par les formules de transformation

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z,\\ y_1 &= y_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z,\\ z_1 &= z_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z,\end{aligned}\right.$$

où toutes les quantités entrant aux seconds membres varient d'une manière connue avec le temps.

Les projections $\dfrac{dx_1}{dt}$, $\dfrac{dy_1}{dt}$ et $\dfrac{dz_1}{dt}$ sur les axes fixes de la vitesse du mouvement résultant sont données par la dérivation des équations (1) :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \left(\frac{dx_0}{dt} + \frac{d\alpha_1}{dt}x + \frac{d\alpha_2}{dt}y + \frac{d\alpha_3}{dt}z\right) + \left(\alpha_1\frac{dx}{dt} + \alpha_2\frac{dy}{dt} + \alpha_3\frac{dz}{dt}\right),\\ \frac{dy_1}{dt} &= \left(\frac{dy_0}{dt} + \frac{d\beta_1}{dt}x + \frac{d\beta_2}{dt}y + \frac{d\beta_3}{dt}z\right) + \left(\beta_1\frac{dx}{dt} + \beta_2\frac{dy}{dt} + \beta_3\frac{dz}{dt}\right),\\ \frac{dz_1}{dt} &= \left(\frac{dz_0}{dt} + \frac{d\gamma_1}{dt}x + \frac{d\gamma_2}{dt}y + \frac{d\gamma_3}{dt}z\right) + \left(\gamma_1\frac{dx}{dt} + \gamma_2\frac{dy}{dt} + \gamma_3\frac{dz}{dt}\right).\end{aligned}\right.$$

Les premières parenthèses des seconds membres sont les projections de la vitesse du point auxiliaire A_e dont les coordonnées x, y, z resteraient constantes, c'est-à-dire du point lié à S et coïncidant avec le point A à l'instant considéré [en effet les projections de la vitesse de A_e s'obtiennent par dérivation des équations (1) en traitant x, y, z comme des constantes] ; les secondes

parenthèses sont les projections sur les axes fixes du vecteur dont les projections sur Ox, Oy, Oz sont $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$; ce sont donc les projections de la vitesse relative sur les axes fixes.

Les formules (2) expriment le théorème déjà énoncé au n° 18 :

La vitesse absolue $\overrightarrow{V_a}$ d'un mobile est, à chaque instant, la somme géométrique de la vitesse d'entraînement $\overrightarrow{V_e}$ et de la vitesse relative $\overrightarrow{V_r}$ de ce mobile à cet instant.

On peut traduire ce théorème par l'égalité géométrique

$$\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_e} + \overrightarrow{V_r}.$$

On peut manifestement généraliser au cas d'un nombre quelconque de mouvements composants ; si le point A est en mouvement dans S, S dans S_1, S_1 dans S_2, etc., la vitesse du mouvement absolu est la somme géométrique des vitesses des mouvements composants, chaque vitesse étant celle du point coïncidant avec A dans un système pendant son mouvement par rapport au système suivant.

34. Problème du mouvement relatif. — On a souvent à résoudre le problème inverse du précédent : déterminer le mouvement relatif d'un point connaissant son mouvement absolu et le mouvement d'entraînement. La solution analytique est donnée par l'inversion des formules (1).

D'après le théorème précédent, la vitesse relative est la différence géométrique entre la vitesse absolue et la vitesse d'entraînement du point coïncident, ou encore est la somme géométrique de la vitesse absolue et de la vitesse égale et opposée à celle d'entraînement.

Exemple. *Problème de la came.* — Considérons dans un plan un point A mobile assujetti à se déplacer suivant une droite D et restant en contact avec le contour d'une plaque ou came C tournant dans le plan autour d'un point O situé sur D (*fig.* 32).

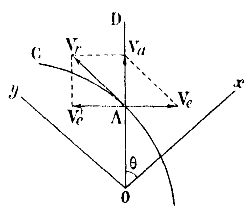


Fig. 32.

On suppose que le mouvement de rotation a lieu dans le sens des aiguilles d'une montre avec une vitesse angulaire constante ω. On demande quel profil doit avoir la came pour que le mouvement du point A sur la droite D ait lieu suivant une loi donnée $r = f(t)$.

Le mouvement absolu sur D résulte du mouvement d'entraînement circulaire et du mouvement relatif de glissement sur la came ; ce dernier résulte dès lors du

mouvement absolu sur D et d'un mouvement opposé au mouvement de rotation précédent, c'est-à-dire d'un mouvement dans le sens direct avec la vitesse ω. Les équations du mouvement dans un système d'axes Ox, Oy liés à la plaque sont donc $r = f(t)$, $\theta = \omega t$; on en déduit l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires $r = f\left(\frac{\theta}{\omega}\right)$.

La vitesse relative $\overrightarrow{V_r}$ est la différence entre la vitesse absolue $\overrightarrow{V_a}$ supposée connue, et la vitesse d'entraînement $\overrightarrow{V_e}$ égale à ωr perpendiculaire à OA ; c'est aussi la somme de $\overrightarrow{V_a}$ et de $\overrightarrow{V'_e}$ égal et opposé à $\overrightarrow{V_e}$. On a ainsi la possibilité de déterminer la tangente à la came en chacun de ses points.

35. Composition des accélérations. — Un cas simple que nous allons examiner d'abord est celui où le système S est animé par rapport au système S_1 d'un mouvement de translation ; on peut supposer alors que les trièdres $Oxyz$ et $O_1x_1y_1z_1$ sont constamment parallèles ; les formules de transformation prennent la forme simple

$$x_1 = x_0 + x, \qquad y_1 = y_0 + y, \qquad z_1 = z_0 + z ;$$

en les dérivant, on a

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \frac{dx}{dt}, \qquad \frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + \frac{dy}{dt}, \qquad \frac{dz_1}{dt} = \frac{dz_0}{dt} + \frac{dz}{dt},$$
$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d^2x_0}{dt^2} + \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{d^2y_0}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad \frac{d^2z_1}{dt^2} = \frac{d^2z_0}{dt^2} + \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Le point coïncident A_e a même vitesse et même accélération que le point O. Les formules trouvées expriment que la propriété des vitesses s'étend aux accélérations, c'est-à-dire que :

Dans le cas où le mouvement d'entraînement est une translation, l'accélération absolue d'un point est la somme géométrique de son accélération d'entraînement et de son accélération relative.

Considérons maintenant le cas général, et prenons la dérivée des formules générales (2) du n° 33 ; nous aurons

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} = & \left(\frac{d^2x_0}{dt^2} + \frac{d^2\alpha_1}{dt^2}x + \frac{d^2\alpha_2}{dt^2}y + \frac{d^2\alpha_3}{dt^2}z\right) \\ & + \left(\alpha_1\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha_2\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha_3\frac{d^2z}{dt^2}\right) + 2\left(\frac{d\alpha_1}{dt}\frac{dx}{dt} + \frac{d\alpha_2}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{d\alpha_3}{dt}\frac{dz}{dt}\right), \end{aligned} \right.$$

et deux formules analogues pour y_1 et z_1. Les premières parenthèses des seconds membres sont les projections sur les axes fixes de l'accélération du point A_e dont les coordonnées x, y, z resteraient constantes, c'est-à-dire du point coïncident dans le mouvement d'entraînement [ces projections s'obtiennent en effet par deux dérivations successives des équations (2) en traitant x, y, z comme

des constantes]; les secondes parenthèses sont manifestement les projections sur les axes fixes de l'accélération relative ; les derniers termes peuvent être considérés comme les projections d'un vecteur que l'on appelle *accélération complémentaire*, ou *accélération de Coriolis*. Nous avons donc le théorème :

L'accélération absolue d'un point est la somme géométrique de son accélération d'entraînement, son accélération relative et son accélération complémentaire.

Il reste à caractériser l'accélération complémentaire. Pour cela, remarquons que le mouvement d'entraînement résulte à l'instant considéré d'une translation instantanée égale à celle du point O, et d'une rotation instantanée autour d'un axe passant par O; les formules (7) du n° 29 donnent précisément les projections sur les axes fixes de la vitesse dans cette rotation instantanée d'un point de coordonnées (x, y, z). L'accélération complémentaire est donc le double de la vitesse que prendrait, dans cette rotation instantanée, le point de coordonnées $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, c'est-à-dire l'extrémité d'un vecteur $\overrightarrow{OW_r}$ issu de O et équipollent à la vitesse relative $\overrightarrow{AV_r}$ du point A (*fig.* 33).

Or nous savons que la vitesse du point W_r est le moment par rapport à ce point du vecteur $\overrightarrow{OR}$ représentatif de la vitesse ω de rotation ; elle est encore identique au moment par rapport à l'extrémité V_r de la vitesse relative de A d'un vecteur $\overrightarrow{AR'}$ équipollent à la vitesse de rotation instantanée ; elle a pour valeur $\omega v_r \sin(R, V_r)$; il faut doubler cette valeur et appliquer le vecteur obtenu au point A. Nous pouvons donc énoncer ce résultat :

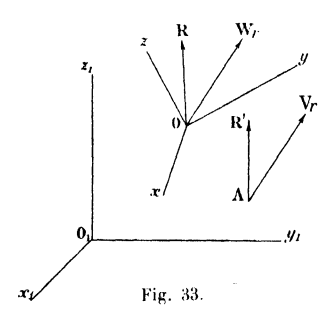


Fig. 33.

Pour déterminer l'accélération complémentaire d'un point A, *on mène par ce point comme origine un vecteur représentatif de la vitesse* ω *de rotation instantanée, et l'on prend le double du moment de ce vecteur par rapport à l'extrémité* V_r *de la vitesse relative du point considéré.*

Nous désignerons par $\overrightarrow{J_e}, \overrightarrow{J_r}, \overrightarrow{J_c}$ les vecteurs représentant les trois composantes de l'accélération $\overrightarrow{J_a}$, par γ_e, γ_r et γ_c leurs valeurs ; on a

$$\overrightarrow{J_a} = \overrightarrow{J_e} + \overrightarrow{J_r} + \overrightarrow{J_c}, \qquad \gamma_c = 2\omega v_r \sin(\omega, V_r), \qquad \overrightarrow{J_c} = 2M_{V_r}^t(\overrightarrow{A\omega}).$$

L'accélération de Coriolis est nulle dans les cas suivants :

1° $\omega = 0$, la rotation instantanée est nulle ; cela a lieu à tout instant si

l'entraînement est une translation; 2° si $v_r = 0$, la vitesse relative est nulle; cela a lieu à tout instant si le point est en équilibre relatif; 3° si la vitesse relative est parallèle à l'axe de la rotation instantanée.

Dans les applications, où l'on a surtout en vue l'étude des mouvements relatifs, on cherche les projections de l'accélération sur les axes entraînés $Oxyz$; celles de $\vec{J}_a$ et de $\vec{J}_e$ sont ordinairement connues, celles de $\vec{J}_r$ sont $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$; quant aux projections de $\vec{J}_c$, elles résultent de son évaluation géométrique, ou des formules (1) du n° 7 appliquées au point W_r; en désignant par p, q, r les projections sur Ox, Oy, Oz du vecteur $\vec{OR}$, on aura pour projections de $\vec{J}_c$ sur les axes x, y, z:

$$2\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right), \qquad 2\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right), \qquad 2\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right).$$

Exemple. — Supposons que le mouvement d'entraînement soit une rotation autour d'un axe fixe que l'on choisit comme axe Oz et comme axe O_1z_1; soit à un instant donné ω la vitesse de rotation. Le mouvement d'entraînement est circulaire; si r est le rayon du cercle décrit par le point coïncident, le vecteur $\vec{AJ}_e$ est la résultante d'un vecteur égal à $r\frac{d\omega}{dt}$ tangent à ce cercle et d'un vecteur égal à $\omega^2 r$ dirigé suivant le rayon vers le centre; les projections de ces deux vecteurs sur les axes Ox, Oy, Oz sont respectivement

$$-y\frac{d\omega}{dt}, \qquad x\frac{d\omega}{dt}, \qquad 0,$$
$$-\omega^2 x, \qquad -\omega^2 y, \qquad 0.$$

Les projections de l'accélération complémentaire sont le double de celles de la vitesse du point $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ dans la rotation, et ont pour valeurs

$$-2\omega\frac{dy}{dt}, \qquad 2\omega\frac{dx}{dt}, \qquad 0.$$

36. Composition de plusieurs mouvements. — Supposons qu'un système S soit en mouvement relatif par rapport à un système S_1, et que celui-ci ait un mouvement d'entraînement par rapport à un système S_2; S aura par rapport à S_2 un mouvement résultant ou absolu; la loi de ce mouvement se déduit immédiatement des lois du mouvement relatif d'un trièdre $Oxyz$ lié à S par rapport à un trièdre $O_1x_1y_1z_1$ lié à S_1, et du mouvement d'entraînement de ce dernier trièdre par rapport à un autre $O_2x_2y_2z_2$ lié à S_2.

C'est le problème de la recherche des vitesses des points de S que l'on se propose ordinairement de résoudre. Nous avons vu (n° 29) que l'état des

vitesses relatives est caractérisé par deux vecteurs $\vec{R}$ et $\vec{V_0}$ liés à O (ou bien $\vec{R}$ et $\vec{G}$ liés à un point de l'axe de rotation et glissement), le premier de la nature des résultantes, le second de la nature des moments, et que le vecteur vitesse d'un point A est le moment résultant par rapport à A de ce système de vecteurs. De même les vitesses du mouvement d'entraînement sont caractérisées par deux vecteurs analogues $\vec{R_1}$ et $\vec{V_1}$ liés à O_1, et la vitesse d'entraînement du point coïncident A_e est le moment résultant par rapport à A_e de ce système de vecteurs. Dès lors la vitesse absolue du point A est le moment résultant du système $\vec{R}$, $\vec{V_0}$, $\vec{R_1}$, $\vec{V_1}$; on peut remplacer ce système par un autre qui en est la réduction, et en particulier par deux vecteurs $\vec{R_a}$, $\vec{V_a}$ portés par l'axe central ; on obtient ainsi les éléments du mouvement hélicoïdal tangent au mouvement absolu.

Ceci se généralise au cas d'un nombre quelconque de mouvements composants ; il suffit d'effectuer la réduction du système des vecteurs caractérisant les vitesses des mouvements composants. Nous pouvons ajouter qu'un système de vecteurs étant réductible à zéro, une ou deux résultantes, le mouvement d'un système est réductible à chaque instant au repos, ou à une ou à deux rotations.

Exemples. 1° Si tous les mouvements sont de translation, tous les vecteurs $\vec{R}$ sont nuls, le moment est le même en tous les points de l'espace, et le mouvement résultant est une translation.

2° Si l'on considère des rotations autour d'axes concourants en un point O, les vecteurs moments dans la réduction en ce point sont nuls ; le mouvement résultant est une rotation autour d'un axe passant par le même point ; le vecteur représentatif de la vitesse angulaire résultante étant la somme géométrique des vecteurs analogues composants.

3° Si l'on considère des rotations autour d'axes parallèles, il suffit de se reporter à la réduction d'un système de vecteurs parallèles (n° **11**). Si la somme algébrique des vitesses angulaires n'est pas nulle, le mouvement résultant est, à l'instant considéré, une rotation autour d'un axe parallèle aux premiers, portant la résultante des vitesses angulaires composantes, et avec une vitesse égale à cette résultante. Si la somme algébrique des vitesses angulaires est nulle, le mouvement résultant est, à l'instant considéré, une translation dont la vitesse est le moment résultant des vitesses angulaires composantes.

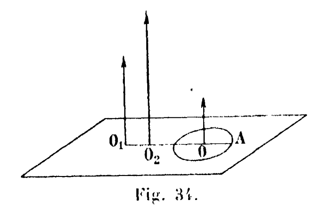


Fig. 34.

On voit en particulier qu'un couple de rotations parallèles de vitesses égales et de sens contraires est équivalent à une translation.

Supposons par exemple (*fig.* 34) qu'un disque plan posé sur une plaque

tourne autour de son centre O lié à cette plaque, tandis que celle-ci tourne autour d'un axe qui lui est normal et la traverse en un point O_1. Soient ω la vitesse angulaire du disque dans son mouvement relatif par rapport à la plaque, et ω_1 la vitesse angulaire de celle-ci. Si $\omega + \omega_1$ n'est pas nul, le mouvement instantané absolu du disque est une rotation autour d'un axe normal à la plaque, passant par le centre O_2 des deux vecteurs parallèles représentatifs de ω et ω_1. Si les rotations sont égales et opposées, le mouvement instantané du disque est une translation ; on peut voir en effet qu'un rayon OA du disque reste alors parallèle à lui-même.

CHAPITRE VI

PRINCIPES DE LA DYNAMIQUE. TRAVAIL.

37. Trièdre de Galilée. Postulats. — La dynamique est basée sur des principes ou postulats qui sont des résultats d'expériences et d'observations astronomiques, et qui se sont trouvés vérifiés soit eux-mêmes, soit dans leurs conséquences avec une approximation très suffisante ; il faut toutefois que les mouvements observés ou étudiés soient rapportés à certains trièdres dits de Galilée. L'un de ces trièdres a son origine au centre de gravité du système solaire, point qui est pratiquement confondu avec le centre du Soleil, et ses axes dirigés vers trois étoiles fixes. Ce n'est qu'en astronomie et pour l'étude de certains problèmes terrestres spéciaux comme celui du pendule de Foucault qu'il faut se rapporter à un trièdre ainsi lié au Soleil. Pour les phénomènes usuels observés à la surface de la Terre, les principes sont vérifiés avec une approximation presque toujours suffisante dans la pratique lorsqu'ils sont rapportés à un trièdre lié à la Terre.

Dans tous les cas, la dynamique est fondée sur les principes suivants concernant les accélérations des mouvements rapportés à un trièdre de Galilée :

1° Principe de l'inertie. — Un point matériel supposé seul dans l'univers (ou, ce qui revient au même, supposé infiniment éloigné des autres points matériels) n'a pas d'accélération. S'il est au repos, il reste au repos ; s'il est en mouvement, son mouvement est rectiligne et uniforme.

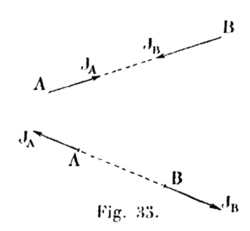


Fig. 35.

2° Principe de la conservation du rapport des accélérations. — 1re *partie*. Si l'on suppose d'abord deux points matériels A et B en présence et supposés seuls, les accélérations de leurs mouvements sont deux vecteurs $\vec{J}_A$, $\vec{J}_B$ dirigés suivant la droite AB dans des sens opposés (*fig.* 35) soit en rapprochant les points A et B, soit en les éloignant l'un de l'autre, et le rapport de ces accélérations est constant quelle que soit la cause physique des mouvements (attraction, phénomènes électriques, etc). Donnons-nous arbitrairement un nombre constant m_A ; nous en déduirons,

d'après ce qui précède, un nombre constant m_B tel que l'on ait toujours

$$(1) \qquad \frac{\gamma_A}{\gamma_B} = \frac{m_B}{m_A}, \qquad \text{d'où} \qquad m_A\gamma_A = m_B\gamma_B.$$

Si donc on met en présence de A successivement et séparément des points B, C, ..., il existera des nombres m_A, m_B, m_C, ... tels que l'on ait successivement $\qquad m_A\gamma_A = m_B\gamma_B, \qquad m_A\gamma_A = m_C\gamma_C, \ldots\ldots$

2[e] *partie.* Si l'on met en présence deux des points précédents autres que A, par exemple B et C, les accélérations sont précisément liées par la relation $m_B\gamma_B = m_C\gamma_C$, m_B et m_C étant les nombres précédents résultant de la mise en présence de A.

Il existe donc un tableau des nombres m_A, m_B, m_C, ... caractéristiques des points matériels et tels que si l'on met en présence deux quelconques d'entre eux, les accélérations de leurs mouvements sont dirigées suivant la droite qui les joint, dans des sens opposés, et sont dans un rapport égal à l'inverse du rapport des nombres caractérisant ces points.

Remarquons que si l'on multiplie le nombre arbitraire m_A par un facteur, tous les autres nombres m_B, m_C, ... sont multipliés manifestement par le même facteur.

3° Principe de la composition des accélérations. — Si plusieurs points B, C, ... sont mis simultanément en présence d'un point A, l'accélération du mouvement de ce point A est la somme géométrique des accélérations qu'il prendrait s'il était mis successivement et séparément en présence des points donnés B, C, ...

Ces principes conduisent à l'introduction des notions suivantes :

1° Les coefficients m_A, m_B, m_C, ... caractéristiques des points matériels sont appelés leurs *masses* ; la valeur d'une de ces masses peut être choisie arbitrairement ce qui revient d'ailleurs à choisir l'unité de masse.

2° On appelle *force* un vecteur lié à un point matériel, et égal au produit de la masse m par l'accélération du point ; la force est ainsi définie par l'égalité géométrique

$$(2) \qquad \vec{F} = m\vec{J} ;$$

la valeur numérique de la force est $f = m\gamma$, et l'on dit que le point est soumis à la force $\vec{F}$.

Avec la notion de force ainsi introduite, les trois principes précédents de la mécanique peuvent être énoncés de la façon suivante :

1° *Principe de l'inertie.* — Si un point matériel est supposé seul dans l'univers, il n'est soumis à aucune force.

2° *Principe de l'égalité de l'action et de la réaction.* — Si deux points sont mis en présence, ils sont soumis à deux forces dirigées suivant la droite qui les joint, égales et de sens opposés.

3° *Principe de la composition des forces.* — Si un point est soumis simultanément à plusieurs forces, ces forces peuvent être remplacées par leur somme géométrique ; on dit que cette somme est la résultante des forces données.

Remarque. — Si un trièdre est animé par rapport à un autre d'un mouvement d'entraînement de translation rectiligne et uniforme, l'accélération absolue d'un point est égale à son accélération relative, parce que l'accélération d'entraînement et l'accélération complémentaire (n° 35) sont nulles. Il résulte de là que, si les principes de la dynamique sont valables pour un trièdre, ils sont encore valables pour tout autre trièdre ayant par rapport au premier un mouvement de translation rectiligne et uniforme ; il existe donc une infinité de trièdres de Galilée se déduisant de l'un d'eux ainsi qu'on vient de le dire.

38. Notion générale de force. — Dans ce qui précède, la force apparaît comme résultant de l'observation d'un mouvement ; mais on a été amené à élargir la notion de force. D'abord on envisage certaines actions à distance, telles que l'attraction universelle, comme mieux connues que les mouvements des points matériels soumis à ces actions ; on utilise alors l'équation (2) pour déterminer le mouvement de ces points, on renverse en quelque sorte cette équation en traitant $\vec{F}$ comme donnée et $\vec{J}$ comme inconnue. On dit que la force est la cause du mouvement et que le mouvement est l'effet de la force ; le troisième principe s'appelle alors principe de l'indépendance des effets des forces.

C'est à ce nouveau point de vue que l'on se place dans la plupart des problèmes de dynamique. On dit en particulier que l'on définit un *champ de forces* si l'on fait correspondre à chaque point d'une portion finie ou infinie de l'espace un vecteur $\vec{F}$ issu de ce point ; les projections X, Y, Z de ce vecteur $\vec{F}$ sont donc des fonctions données des coordonnées x, y, z du point. Si alors un point matériel de masse m est placé en un point géométrique du champ, l'accélération du mouvement qu'il prend est donnée par l'équation (2).

Mais on rencontre dans la nature d'autres actions auxquelles on est amené à donner le nom de forces ; par exemple les actions de contact telles que la pression d'un fluide sur une portion de la paroi du vase qui le contient, les tensions moléculaires dans une section d'un corps solide ; bien que ne se manifestant pas par des mouvements, ces actions statiques sont susceptibles d'être représentées par des vecteurs, et l'on introduit un quatrième principe ou postulat de la mécanique, en attribuant à ces vecteurs les propriétés des forces énoncées dans les principes de la dynamique ; c'est ainsi que se trouve

justifiée dans tous les cas la règle de la composition des forces concourantes et leur remplacement par une résultante qui est leur somme géométrique.

La force la plus connue est celle de la pesanteur ; dans un espace assez restreint, l'expérience montre que l'accélération de tous les points matériels a une valeur constante que l'on appelle g et qui a à Paris la valeur $9{,}808 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$; la force s'exerçant sur un point de masse m a pour valeur $p = mg$ conformément à l'équation (2) et s'appelle son poids. Si ce point est posé sur une table, il reste en repos, et son accélération est nulle ; les forces qui agissent sur lui ont une résultante nulle ; on dit qu'il est soumis à une réaction de la table égale et contraire à son poids, satisfaisant par suite au principe de l'égalité de l'action et de la réaction.

De même si l'on tient un corps soulevé, le bras exerce une force égale et contraire au poids ; c'est cette idée de force musculaire qui a donné naissance à la notion de force en statique.

La balance permet d'équilibrer les unes par les autres les forces de la pesanteur, donc de mesurer des poids, et comme les poids sont proportionnels aux masses, elle permet de mesurer les masses elles-mêmes. C'est là une idée importante, car la masse d'un point matériel ne varie pas, tandis que son poids varie proportionnellement à la valeur de g, c'est-à-dire avec la latitude et l'altitude du lieu où il se trouve. Les dynamomètres, basés sur la déformation de pièces flexibles sous l'action de forces agissant par contact, constituent un autre moyen de mesurer statiquement des forces en les comparant aux poids de corps produisant la même déformation. Nous admettrons que les forces ainsi mesurées satisfont aux mêmes principes que les forces dynamiques.

39. Unités. — Il existe deux systèmes de grandeurs fondamentales : 1er *système* : longueur, masse et temps ; la force est alors une grandeur dérivée définie par $f = m\gamma$, sa dimension est $[F] = [LMT^{-2}]$. Dans le système C. G. S., l'unité de longueur est le centimètre, l'unité de masse le gramme-masse (c'est-à-dire la millième partie de la masse du kilogramme étalon déposé aux Archives) équivalent à peu près à la masse d'un centimètre cube d'eau, enfin l'unité de temps est la seconde. L'unité de force est donc celle qui, appliquée au gramme-masse, lui donne une accélération égale à 1 cm par seconde carrée ; cette unité est la *dyne*.

Dans le système M. T. S. (loi du 2 avril 1919), l'unité de longueur est le mètre, l'unité de masse est celle de la tonne ou de 1 000 kilogrammes, l'unité de temps est la seconde. L'unité de force est alors celle qui, appliquée à la masse d'une tonne, lui communique une accélération de 1 mètre par seconde carrée ; cette unité est le *sthène* qui vaut 10^8 dynes.

Ajoutons que dans le système M. T. S. la *pièze* ou **unité de pression** est égale à 1 sthène par m²; l'*hectopièze* est environ égale à 1,02 kilogramme-force par cm².

2ᵉ *système* : longueur, force, temps; la masse est alors une grandeur dérivée, définie par $m = \frac{f}{\gamma} = \frac{p}{g}$, p étant le poids; sa dimension est

$$[\mathrm{M}] = [\mathrm{FL}^{-1}\mathrm{T}^2].$$

Dans le système industriel M. K. S., l'unité de longueur est le mètre, l'unité de force le kilogramme-poids, c'est-à-dire le poids à Paris du kilogramme étalon déposé aux Archives, et l'unité de temps la seconde. L'unité de masse est celle d'un corps dont le poids est égal à g, c'est-à-dire à 9,81 kilogrammes-masse (puisqu'on a en général $p = mg$, lorsque $m = 1$ on a $p = g$).

La valeur du kilogramme-force dans le système C. G. S. est égale au poids de la masse du kilogramme, ou au produit de 1 000 grammes-masse par l'accélération g qui vaut 981 centimètres, elle est donc $981\,000 = 9{,}81 \times 10^5$ dynes; la dyne vaut donc $\frac{10^{-5}}{9{,}81}$ kilogramme-force. Le sthène vaut $\frac{1\,000}{9{,}81}$ ou environ 102 kilogrammes-force.

40. Travail. — Lorsqu'une force constante $\vec{F}$ est appliquée à un point matériel qui se déplace suivant un segment rectiligne A_0A (*fig.* 36), on appelle travail de la force le produit de l'intensité de la force par le déplacement A_0A et par le cosinus de l'angle de $\vec{F}$ et A_0A, ce qu'on exprime par l'égalité

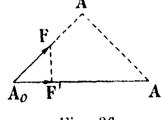


Fig. 36.

$$\mathcal{T} = \mathrm{F}\,.\,A_0A\,.\,\cos(\mathrm{F}, A_0A).$$

Si l'angle (F, A_0A) est nul ou *aigu*, le travail est positif et l'on dit qu'il est *moteur*; si cet angle est *obtus* ou égal à deux droits, le travail est négatif, et l'on dit qu'il est *résistant*; si cet angle est droit, le travail est nul.

On peut remarquer que le travail est égal au produit du déplacement par la projection F' de la force sur la direction du déplacement, ou encore au produit de la force par la projection A_0A' du déplacement sur la direction de la force; dans tous les cas, il est égal au produit scalaire des deux vecteurs $\vec{F}$ et $\overrightarrow{A_0A}$ (nº 13). Si X, Y, Z sont les projections de la force sur les axes de coordonnées, $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ celles du segment A_0A; α, β, γ; α', β', γ' les cosinus directeurs de leurs directions, on a

$$\mathcal{T} = \mathrm{F}\,.(A_0A)(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') = \mathrm{X}(x - x_0) + \mathrm{Y}(y_0 - y) + \mathrm{Z}(z - z_0).$$

Considérons maintenant le cas général où une force $\vec{F}$ pouvant varier en

grandeur et en direction est appliquée à un point matériel dont le déplacement A_0A peut être quelconque (*fig.* 37).

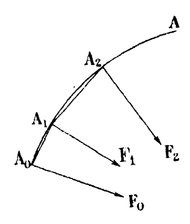


Fig. 37.

Décomposons le déplacement en portions infiniment petites par des points A_0, A_1, A_2, ... ; désignons par $\vec{F_0}$, $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, ... les vecteurs représentatifs de la force en ces points ; évaluons le travail de $\vec{F_0}$ pour le déplacement suivant la corde A_0A_1, celui de $\vec{F_1}$ pour le déplacement suivant la corde A_1A_2, et ainsi de suite ; faisons la somme de ces travaux dits travaux élémentaires : la limite $\mathcal{T}$ de cette somme lorsque le nombre des points de division augmente indéfiniment, chaque segment partiel tendant vers zéro, s'appelle travail de la force $\vec{F}$ pour le déplacement A_0A.

L'existence de cette limite résulte du calcul intégral ; si les projections de la force en un des points de division sont X, Y, Z, si celles du segment joignant ce point au suivant sont Δx, Δy, Δz, le travail élémentaire est égal au produit scalaire du vecteur X, Y, Z par le vecteur Δx, Δy, Δz, c'est-à-dire à

$$X\Delta x + Y\Delta y + Z\Delta z,$$

sa partie principale (qui est un infiniment petit équivalent) est la différentielle

$$d\mathcal{T} = Xdx + Ydy + Zdz,$$

et la limite $\mathcal{T}$ de la somme des travaux élémentaires est égale à l'intégrale curviligne

$$(3) \qquad \mathcal{T} = \int_{A_0}^{A} Xdx + Ydy + Zdz.$$

(On ne change pas la limite d'une somme d'infiniment petits en nombre infini quand on remplace les termes par des infiniment petits équivalents.)

Nous verrons plus loin comment on peut la calculer ; mentionnons immédiatement un procédé graphique de détermination du travail : si l'on projette en chaque point du déplacement la force sur la tangente à la trajectoire, si F_t désigne cette projection, et si Δs représente la longueur du déplacement A_0A, le travail élémentaire est $F_t\Delta s$ et sa partie principale est égale à $F_t ds$, ds étant la différentielle de l'arc ; le travail total est donc égal à l'intégrale $\int F_t ds$. Si l'on connaît la loi de variation de F_t en fonction de s, il suffit de construire la courbe représentative de cette loi ; le travail est égal à l'aire comprise entre l'axe représentatif des abscisses curvilignes s, la courbe précédente et les ordonnées relatives aux abscisses curvilignes de A_0 et de A.

Théorème. — *Le travail de la résultante de plusieurs forces appliquées au même point matériel est égal à la somme des travaux des composantes.*

Cela résulte de ce que la projection de la résultante sur le déplacement élémentaire est égale à la somme des projections des composantes.

Mentionnons en particulier le cas où le point matériel a un déplacement circulaire, dans une rotation autour d'un axe ; si l'on prend Oz suivant cet axe, on a

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = C^{te},$$

$$d\mathcal{T} = Xdx + Ydy + Zdz = (-Xr\sin\theta + Yr\cos\theta)d\theta = (xY - yX)d\theta = Nd\theta,$$

N étant le moment de la force par rapport à l'axe de rotation ; on a par suite

$$\mathcal{T} = \int Nd\theta.$$

Ce résultat aurait pu être obtenu en décomposant la force suivant trois composantes : l'une parallèle à l'axe, l'autre suivant le rayon vecteur, et la troisième suivant la tangente à la trajectoire ; d'après le théorème précédent, le travail élémentaire de la force est égal à la somme des travaux de ces trois composantes, et il se réduit à celui de la troisième composante F_t, c'est-à-dire à $F_t r d\theta = Nd\theta$.

41. Unités de travail. Puissance. — Un travail est le produit d'une force par une longueur et a la dimension [FL]. Dans le système C. G. S., sa dimension est $[ML^2T^{-2}]$; l'unité est le travail d'une dyne produisant un déplacement d'un centimètre dans sa direction ; cette unité de travail s'appelle *erg* ; on utilise aussi comme unité de travail le *joule*, qui vaut 10^7 ergs.

Dans le système M. T. S., l'unité est le travail d'un sthène produisant un déplacement de 1 mètre dans sa direction ; il est égal à 10^{10} ergs ou à un *kilojoule*.

Dans le système industriel M. K. S., l'unité est le travail d'un kilogramme-force produisant un déplacement d'un mètre dans sa direction ; on l'appelle *kilogrammètre*. Comme un kilogramme-force vaut $9{,}81 \times 10^5$ dynes, le kilogrammètre vaut $9{,}81 \times 10^7$ dynes-centimètre, ou $9{,}81 \times 10^7$ ergs ou 9,81 joules.

Remarque. — Le moment d'une force et le travail ont la même dimension ; ils sont cependant des grandeurs d'espèces différentes ; cela tient à ce qu'un travail élémentaire dans un mouvement de rotation est le produit d'un moment N par un angle $d\theta$ qui n'a pas de dimension. On a proposé de nommer différemment l'unité de travail et l'unité de moment, et de désigner par exemple dans le système M. K. S. l'unité de moment par mètre-kilogramme.

La définition du travail ne fait pas intervenir la durée du déplacement ; cependant dans les applications industrielles le temps joue un rôle important. Lorsque le travail d'une force a la même valeur dans des intervalles de temps

égaux, on appelle *puissance* le travail produit pendant l'unité de temps ; la puissance a manifestement comme dimension [FLT^{-1}].

Dans le système C. G. S., on prend comme unité pratique de puissance le *watt*, qui est le travail d'un joule par seconde, ou le *kilowatt*, qui vaut 1 000 watts. Dans le système industriel M. K. S., l'unité de puissance est le *cheval-vapeur*, qui est le travail de 75 kilogrammètres par seconde. Un cheval-vapeur vaut donc $75 \times 9{,}81$ joules par seconde ou 736 watts.

42. Calcul du travail dans le cas général. — En dynamique, le cas le plus général que l'on ait à envisager est celui où la force dépend de la position du point matériel, de sa vitesse et du temps ; l'intégrale (3) ne peut être calculée que si la loi du mouvement est connue ; les coordonnées du mobile et les composantes de sa vitesse, dès lors celles de la force, sont alors des fonctions connues du temps t, et l'on évalue l'intégrale comme une intégrale curviligne dont l'élément dépend du paramètre t.

Un cas particulier est celui où la force ne dépend que de la position du point auquel elle est appliquée ; X, Y, Z sont alors des fonctions de x, y, z ; l'intégrale (3) est une intégrale curviligne relative à la trajectoire, et on l'évalue en utilisant un paramètre au moyen duquel sont évaluées les coordonnées x, y, z.

43. Cas d'une fonction des forces. — Comme nous l'avons dit, une portion finie ou infinie de l'espace constitue un *champ de forces* si l'on fait correspondre à chaque point un vecteur lié à ce point, représentant la force à laquelle serait soumis un certain point matériel placé en ce point ; on appelle direction du champ en ce point celle de ce vecteur et intensité du champ celle de la force appliquée à un point matériel de masse unité ; un point de masse m est soumis à une force m fois plus grande. Par exemple le champ de la pesanteur dans une petite portion de l'espace a une direction constante et une intensité égale à g. Dans un champ de forces, X, Y, Z sont supposées des fonctions données de x, y, z. Le cas le plus important est celui où l'on donne un champ de forces et où le travail élémentaire $Xdx + Ydy + Zdz$ est la différentielle totale d'une fonction $U(x, y, z)$; pour que cela ait lieu il faut et il suffit que les conditions d'intégrabilité exprimées par les égalités

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

soient satisfaites ; on sait qu'on peut alors déterminer par des intégrales simples la fonction $U(x, y, z)$ qui est appelée *fonction des forces* et qui n'est connue qu'à une constante additive près ; les projections de la force sont égales aux

dérivées partielles de U, et l'on a

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Le travail élémentaire est égal à dU.

On dit que la force dérive de la fonction des forces U. La fonction $V = -U$ est appelée *potentiel*.

D'après les propriétés connues des intégrales de différentielles totales, le travail de la force pour un déplacement de $A_0(x_0, y_0, z_0)$ à $A(x, y, z)$ est égal à $U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0)$. Lorsque la fonction U est uniforme, le travail pour un déplacement le long d'un contour fermé quelconque est donc nul. Lorsque U n'est pas uniforme, le travail n'est nul que pour certains contours fermés (voir l'exemple 6, page 70).

44. Surfaces de niveau, lignes de forces. — Dans le cas où les forces d'un champ dérivent d'une fonction des forces $U(x, y, z)$, on appelle surface de niveau ou surface équipotentielle une surface en tous les points de laquelle la fonction des forces (et par suite le potentiel) a la même valeur. L'équation d'une telle surface est $U(x, y, z) = h$.

La force en un point du champ est normale à la surface de niveau qui passe par ce point, car les projections de la force, égales aux dérivées partielles de U, sont égales aux coefficients directeurs de la normale à la surface.

Supposons que la fonction U est uniforme. Lorsque le point matériel se déplace entre un point de la surface $U = h$ et un point de la surface $U = h'$, le travail de la force est égal à $h' - h$ quels que soient les points choisis et le chemin suivi. Considérons deux surfaces de niveau infiniment voisines; la différence $h' - h$ ayant par suite une valeur infiniment petite Δh. Si le déplacement, normal à la surface $U = h$, a une valeur Δn, la valeur de la force, égale au quotient du travail élémentaire Δh par le déplacement Δn qui est dans sa direction, est égale à $\frac{\Delta h}{\Delta n} = \frac{\Delta U}{\Delta n}$; lorsque Δh tend vers zéro, le quotient précédent a pour limite $\frac{dU}{dn}$, que l'on appelle dérivée de U suivant la normale : on peut dire qu'*en chaque point, la force est normale à la surface de niveau qui passe par ce point, dans le sens où la fonction* U *va en croissant, et est égale à la dérivée de cette fonction suivant la normale.*

On appelle *ligne de forces* d'un champ une ligne telle qu'en chacun de ses points la force soit dirigée suivant la tangente à cette ligne. Cette définition ne suppose pas nécessairement qu'il y a une fonction des forces. Les

équations différentielles d'une ligne de forces sont manifestement

$$\frac{dx}{X(x, y, z)} = \frac{dy}{Y(x, y, z)} = \frac{dz}{Z(x, y, z)}$$

(elles expriment que le vecteur force et le vecteur ds ont même direction); l'intégration de ce système conduit à deux équations renfermant ensemble deux constantes arbitraires; par un point du champ passe donc une ligne de forces.

Lorsque les forces du champ dérivent d'une fonction des forces, les lignes de forces sont les trajectoires orthogonales des surfaces de niveau.

Nous allons illustrer cette théorie un peu ardue par des exemples.

45. Exemples. 1° *Champ de la pesanteur.* — Dans un espace restreint, le champ de la pesanteur a une direction constante, celle de la verticale descendante, et une intensité constante égale à g. Si l'on prend l'axe des z suivant la verticale ascendante, les projections de la force appliquée à un point de masse m sont $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -mg$. Le travail élémentaire est égal à $-mgdz = d(-mgz)$. Il existe donc une fonction des forces $U = -mgz$; les surfaces de niveau sont des plans horizontaux, et le travail pour un déplacement A_0A entre deux plans horizontaux de cotes z_0 et z est égal à

$$\mathcal{T} = -mg(z - z_0).$$

2° *Champ de direction normale à un plan, et d'intensité fonction de la distance du point à ce plan.* — Si l'on prend l'axe des z suivant la normale au plan, et si l'intensité du champ en chaque point est égale à $\varphi(z)$, les projections de la force sont $X = 0$, $Y = 0$, $Z = m\varphi(z)$; il y a encore une fonction des forces $U = m\int \varphi(z)dz$. Comme dans le cas précédent, les surfaces de niveau sont des plans parallèles, et le travail pour un déplacement de A_0 à A entre les plans de cotes z_0 et z est

$$\mathcal{T} = m\int_{z_0}^{z} \varphi(z)dz.$$

3° *Champ de direction normale à une droite fixe, et d'intensité fonction de la distance à cette droite.* — En prenant cette droite comme axe des z, désignant par r la distance d'un point à cet axe et par $\varphi(r)$ l'intensité du champ, les projections de la force sont

$$X = m\varphi(r)\frac{x}{r}, \qquad Y = m\varphi(r)\frac{y}{r}, \qquad Z = 0.$$

Il y a une fonction de forces, car on a

$$Xdx + Ydy + Zdz = m\varphi(r)\frac{xdx + ydy}{r} = m\varphi(r)dr,$$

comme on le voit en différentiant la relation $x^2 + y^2 = r^2$; cette fonction est $U = m \int \varphi(r)dr$, et elle ne dépend que de r. Les surfaces de niveau sont des cylindres d'axe Oz, et le travail pour un déplacement de A_0 à A entre les cylindres de rayons r_0 et r est

$$\mathcal{C} = m \int_{r_0}^{r} \varphi(r)dr.$$

4° *Champ de direction passant par un point fixe, et d'intensité fonction de la distance à ce point.* — En prenant le point fixe comme origine, désignant par r la distance d'un point à cette origine, et par $\varphi(r)$ l'intensité du champ, les projections de la force sont

$$X = m\varphi(r)\frac{x}{r}, \qquad y = m\varphi(r)\frac{y}{r}, \qquad Z = m\varphi(r)\frac{z}{r}.$$

Il y a une fonction des forces, car en utilisant la différentiation de l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, on voit que l'on a

$$Xdx + Ydy + Zdz = m\varphi(r)\frac{xdx + ydy + zdz}{r} = m\varphi(r)dr;$$

la fonction des forces $U = m\int \varphi(r)dr$ ne dépend que de r ; les surfaces de niveau sont des sphères ayant pour centre le point fixe, et le travail pour un déplacement de A_0 à A entre les sphères de rayons r_0 et r est égal à

$$\mathcal{C} = m \int_{r_0}^{r} \varphi(r)dr.$$

Si l'on considère par exemple l'attraction newtonnienne, où l'intensité du champ est inversement proportionnelle au carré de la distance et est égale à $\varphi(r) = \frac{-k}{r^2}$, la fonction des forces est égale à

$$U = \int -\frac{km}{r^2}dr = \frac{km}{r};$$

Dans le cas de la répulsion exercée par une masse électrique, inversement proportionnelle au carré de la distance, on a $\varphi(r) = \frac{k}{r^2}$; la fonction des forces est $\frac{-km}{r}$, et le potentiel est égal à $\frac{km}{r}$.

5° *Champ résultant de plusieurs autres dérivant chacun d'une fonction des forces.* — Ce champ dérive d'une fonction des forces égale à la somme des fonctions relatives aux champs composants ; en effet si X_k, Y_k, Z_k sont les composantes de la force exercée sur un point par le champ de rang k, la force du champ résultant a pour projections $X = \Sigma X_k$, $Y = \Sigma Y_k$, $Z = \Sigma Z_k$, et l'on a bien

$$\int Xdx + Ydy + Zdz = \Sigma \int X_k dx + Y_k dy + Z_k dz = \Sigma U_k.$$

Ces considérations s'appliquent aux attractions newtoniennes exercées sur un point matériel de masse m par plusieurs points fixes de masses m_1, m_2, ... dont les distances au premier sont r_1, r_2, ... ; la valeur absolue de la force attractive exercée par la masse m_k sur la masse m est proportionnelle aux masses et en raison inverse du carré de la distance et a pour valeur $\frac{fmm_k}{r_k^2}$; cette force, qu'il faut affecter dans le calcul du signe —, dérive d'une fonction des forces $\frac{fmm_k}{r_k}$, comme nous l'avons vu. Il existe donc pour le champ résultant une fonction des forces égales à

$$U = fm\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \cdots\right).$$

Les mêmes considérations s'appliquent au champ électrique créé par plusieurs masses électrisées exerçant sur une autre masse une action d'après la loi de Coulomb ; il suffit de répéter le calcul précédent en changeant au besoin certains signes ; le potentiel V a la valeur donnée pour U dans le cas précédent.

6° *Champ ayant en chaque point une direction perpendiculaire au plan passant par le point et une droite fixe, et une intensité inversement proportionnelle à la distance à cette droite.* — En prenant la droite comme axe des z, désignant par r la distance du point matériel A à l'axe, par θ l'angle polaire et supposant que la force, de valeur $\frac{km}{r}$, soit appliquée en A perpendiculairement au plan AOz, dans le sens positif, les projections de la force sont

$$X = \frac{km}{r}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{km}{r}\sin\theta,$$
$$Y = \frac{km}{r}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{km}{r}\cos\theta,$$
$$Z = 0,$$

et comme on a $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, on trouve après différentiation

$$Xdx + Ydy + Zdz = kmd\theta$$

Il existe une fonction des forces $U = km\theta$, mais elle n'est pas uniforme car un angle θ possède une infinité de déterminations ; si le point décrit un contour fermé n'entourant pas l'axe Oz, le travail est nul ; s'il décrit un contour fermé entourant l'axe Oz une ou plusieurs fois, la valeur finale de θ diffère de la valeur initiale d'une ou plusieurs fois 2π ; le travail est égal à une ou plusieurs fois $2\pi km$. Les surfaces de niveau sont des plans passant par Oz.

Ces considérations trouvent leur application dans l'étude du champ magnétique créé par un courant électrique rectiligne.

CHAPITRE VII

DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL
THÉORÈMES GÉNÉRAUX

46. Équations générales. Force d'inertie. — Dans tout trièdre de référence par rapport auquel s'appliquent les principes de la dynamique, la résultante $\vec{F}$ des forces auxquelles est soumis un point matériel de masse m est liée à l'accélération $\vec{J}$ de ce point par l'égalité géométrique

$$\vec{F} = m\vec{J}. \tag{1}$$

En désignant par γ la valeur numérique de l'accélération, celle de la force est donc $f = m\gamma$.

Cette relation permet de résoudre deux espèces de problèmes :

1° Connaissant la loi d'un mouvement, calculer la force ; il suffit de trouver les projections de l'accélération pour avoir celles de la force ; le problème est peu souvent envisagé et du reste est susceptible en général de plusieurs déterminations de la force suivant qu'on veut l'exprimer en fonction des coordonnées du point, ou de sa vitesse, ou du temps, ou de ces variables à la fois. Si l'on considère par exemple un mouvement rectiligne suivant Ox, d'après la loi $x = \sin t$, on peut choisir comme loi de la force dirigée suivant Ox, les expressions $-m \sin t$, $-mx$, $-m\sqrt{1 - v^2}$.

2° Connaissant la résultante des forces appliquées à un point matériel, déterminer son mouvement; on a donc à chercher ce mouvement connaissant son accélération $\vec{J} = \frac{\vec{F}}{m}$.

On appelle *force d'inertie* d'un point matériel le vecteur $-m\vec{J}$ lié à ce point. L'égalité (1) peut être interprétée de la façon suivante :

Les forces appliquées à un point matériel et sa force d'inertie forment un système de vecteurs équivalent à zéro.

On donne à cet énoncé le nom de principe de *d'Alembert*.

La traduction par le calcul de l'égalité (1) se fait ordinairement en projetant cette égalité sur les trois axes Ox, Oy, Oz, ce qui donne les trois équations

$$(2) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

en désignant par X, Y, Z les projections de la résultante ; ces projections sont, dans le cas le plus général, des fonctions des coordonnées x, y, z du point, des projections $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ de sa vitesse et du temps. Nous supposerons dorénavant que les fonctions X, Y, Z sont régulières, comme cela se présente d'ailleurs dans les problèmes usuels.

Un cas particulier important est celui pour lequel le point matériel reste en équilibre, de sorte que les coordonnées x, y, z sont invariables. Les premiers membres des équations (2) sont nuls. On a donc $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$. Réciproquement, supposons que les trois fonctions régulières X, Y, Z soient constamment nulles. Nous aurons $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$, $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$ et, en intégrant, $\frac{dx}{dt} = C^{te}$, $\frac{dy}{dt} = C^{te}$, $\frac{dz}{dt} = C^{te}$; si le point est en repos à l'instant initial les trois constantes d'intégration sont nulles ; on a

$$\frac{dx}{dt} = 0, \qquad \frac{dy}{dt} = 0, \qquad \frac{dz}{dt} = 0$$

et, en intégrant,

$$x = C^{te}, \qquad y = C^{te}, \qquad z = C^{te} ;$$

le point matériel reste en repos. On a donc le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point matériel libre reste en équilibre est que les forces appliquées forment un système équivalent à zéro.

Occupons-nous maintenant du cas du mouvement. Les équations (2) forment un système de trois équations différentielles du second ordre. On démontre en Analyse que si les fonctions X, Y, Z sont régulières, ce système a une solution générale unique pour laquelle x, y, z s'expriment au moyen du temps et de six constantes arbitraires. On peut supposer que ces six constantes sont les valeurs pour $t = 0$ des coordonnées x_0, y_0, z_0 et des projections $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)_0$ de la vitesse, c'est-à-dire les caractéristiques de la position initiale et de la vitesse initiale du mobile ; on les désigne sous le nom de ***conditions initiales.***

On appelle ***intégrale première*** des équations du mouvement une relation

entre les coordonnées x, y, z du point, les projections de sa vitesse, le temps et une constante arbitraire, qui est identiquement satisfaite en vertu des équations du mouvement. En supposant que cette relation soit résolue par rapport à la constante, on peut lui donner la forme

$$\Phi\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t\right) = C;$$

on dit encore que Φ est une intégrale première du mouvement.

On vérifie qu'une fonction Φ est une intégrale première si, en prenant sa dérivée par rapport au temps comme celle d'une fonction composée de t, et en y remplaçant les dérivées secondes de x, y, z par leurs expressions tirées des équations (2), le résultat est identiquement nul quelles que soient les valeurs de t, de x, y, z et de leurs dérivées.

Si l'on connaît une ou plusieurs intégrales premières des équations du mouvement, le problème de l'intégration de ce système est simplifié, car on peut remplacer une ou plusieurs équations du second ordre par d'autres du premier ordre ou finies. Si l'on connaissait six intégrales premières distinctes, on pourrait calculer les coordonnées x, y, z et leurs dérivées au moyen du temps et des six constantes arbitraires C_1, C_2, ... C_6 entrant dans les intégrales, l'intégration serait terminée : en faisant dans les expressions trouvées $t = 0$ et remplaçant les coordonnées et leurs dérivées par leurs valeurs initiales, on obtiendrait des équations permettant de calculer les six constantes au moyen des conditions initiales.

On peut étudier un mouvement en utilisant d'autres coordonnées du point matériel que les coordonnées cartésiennes ; si l'on emploie par exemple les coordonnées cylindriques r, θ, z, les composantes de l'accélération données au n° 25 serviront à résoudre le problème de la recherche du mouvement.

On appelle *équations intrinsèques* du mouvement celles qui résultent de la projection de l'égalité (1) sur la tangente, la normale principale et la binormale à la trajectoire en chaque point. Si F_t, F_n et F_b sont les projections sur ces trois droites de la résultante des forces, les formules du n° 24 donnent les équations

$$m\frac{dv}{dt} = F_t, \qquad m\frac{v^2}{\rho} = F_n, \qquad 0 = F_b. \tag{3}$$

Ces équations ne sont guère utilisées que dans le cas où la trajectoire est connue.

47. Quantité de mouvement. Moment cinétique. — On appelle quantité de mouvement d'un point matériel le vecteur $m\vec{V}$, lié à ce point, égal au

produit de sa masse par le vecteur vitesse; ses projections sur les axes sont $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$.

Les équations (2), qui peuvent s'écrire

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) = X, \qquad \frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right) = Y, \qquad \frac{d}{dt}\left(m\frac{dz}{dt}\right) = Z,$$

expriment le théorème suivant, que l'on appelle théorème de la projection de la quantité de mouvement :

La dérivée par rapport au temps de la projection sur un axe de la quantité de mouvement d'un point matériel est égale à la projection sur cet axe de la résultante des forces qui lui sont appliquées.

Si l'on forme en partant des équations (2) les expressions des moments par rapport aux axes, les moments des seconds membres sont

$$yZ - zY = L, \qquad zX - xZ = M, \qquad xY - yX = N\,;$$

ceux des premiers membres sont

$$m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \frac{d}{dt}m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right),$$
$$m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \frac{d}{dt}m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right),$$
$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \frac{d}{dt}m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$$

et sont les dérivées des moments de la quantité de mouvement par rapport aux axes. En les égalant respectivement à L, M, N, on a trois équations exprimant le théorème suivant, que l'on appelle théorème du moment de la quantité de mouvement :

La dérivée par rapport au temps du moment par rapport à un axe de la quantité de mouvement d'un point matériel est égale au moment par rapport à cet axe de la résultante des forces qui lui sont appliquées.

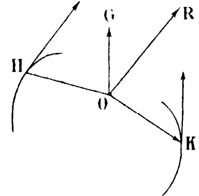


Fig. 38.

On donne souvent le nom de *moment cinétique* d'un point matériel par rapport à un point ou un axe au moment de sa quantité de mouvement par rapport à ce point ou cet axe ; il est facile d'énoncer le deuxième théorème en introduisant le moment cinétique.

L'interprétation géométrique des deux théorèmes qui viennent d'être énoncés est la suivante : Si $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OK}$ sont les vecteurs issus de l'origine équipollents à la quantité de

mouvement et au moment cinétique par rapport à O (*fig.* 38), les dérivées géométriques de ces vecteurs sont respectivement égales à la résultante $\overrightarrow{OR}$ et au moment résultant $\overrightarrow{OG}$ par rapport à O des forces appliquées au point matériel. En effet, en projetant ces égalités géométriques sur les axes, on trouve des équations qui traduisent les théorèmes énoncés.

48. Cas particuliers. Loi des aires. — 1° Si la projection sur un axe de la résultante des forces est constamment nulle, la projection sur cet axe de la quantité de mouvement est constante, et il en est de même de la vitesse ; la projection du point matériel sur cet axe est en repos ou a un mouvement uniforme.

2° Si les projections sur deux axes concourants de la résultante des forces sont constamment nulles, les projections du point matériel sur ces deux axes sont en repos ou ont des mouvements uniformes ; la projection du point sur le plan des deux axes est donc en repos ou a un mouvement rectiligne et uniforme.

Ce cas se présente lorsque le point matériel est soumis à une force parallèle à une droite fixe ; les projections de cette force sur deux axes contenus dans un plan perpendiculaire à cette droite sont nulles. Si la vitesse initiale est parallèle à la droite donnée, sa projection sur le plan normal est nulle, la projection du mobile sur ce plan reste en repos, de sorte que sa trajectoire est une droite parallèle à la droite donnée. Si sa vitesse initiale est quelconque, la projection du mobile sur le plan normal est animée d'un mouvement rectiligne et uniforme ; la trajectoire est une courbe plane dont le plan est parallèle à la droite donnée et contient naturellement la vitesse initiale.

3° Si le moment de la résultante par rapport à une droite est constamment nul, le moment cinétique du point matériel par rapport à cette droite est constant. En prenant la droite pour axe des z, on a une équation de la forme

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C, \tag{4}$$

C étant une constante arbitraire dont la valeur en fonction des conditions initiales est $x_0\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 - y_0\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$. Comme nous l'avons déjà remarqué au n° 22, le premier membre est égal à $r^2\frac{d\theta}{dt}$; il est le double de la vitesse aréolaire de la projection du point matériel sur le plan xOy. Si A est l'aire balayée par le rayon vecteur de cette projection, on a

$$\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2}, \qquad A = \frac{C}{2}t + C',$$

C' étant une nouvelle constante que l'on peut prendre égale à zéro si l'aire est comptée à partir du rayon vecteur initial ; on voit alors que l'aire A est proportionnelle au temps.

On dit qu'un point se déplace dans un plan fixe *suivant la loi des aires* par rapport à un centre O de ce plan lorsque l'aire balayée par le rayon vecteur allant de ce centre au mobile est proportionnelle au temps. On peut alors énoncer le résultat suivant :

Si le moment par rapport à une droite de la résultante des forces appliquées à un point matériel est constamment nul, la projection de ce point sur un plan perpendiculaire à la droite se déplace suivant la loi des aires par rapport au point de rencontre de la droite et du plan.

La réciproque est évidente, car si l'aire précédente est proportionnelle au temps, le moment de la force par rapport à la droite est nul, d'après le théorème du moment de la quantité de mouvement.

Lorsque les conditions précédentes sont remplies, l'équation (4) constitue une intégrale première des équations du mouvement ; on lui donne le nom d'*intégrale des aires*.

4° Si les moments de la résultante des forces par rapport à deux axes concourants sont constamment nuls, cette résultante rencontre les deux axes et est contenue dans leur plan, qui contient la trajectoire, ou bien elle passe constamment par le point de rencontre des deux axes, et l'on dit alors qu'elle est une force centrale.

49. Cas d'une force centrale. Théorème. — *Si un point matériel est soumis à une force passant constamment par un point fixe, sa trajectoire est une droite passant par le point fixe, ou est une courbe plane dont le plan passe par le point fixe, et il décrit alors cette courbe suivant la loi des aires.*

En effet, si l'on prend le point fixe comme origine, les moments de la force par rapport aux axes de coordonnées sont nuls, et les moments cinétiques par rapport à ces axes sont constants ; on a donc trois équations analogues à (4) :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = A, \\ & z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = B, \\ & x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C, \end{aligned} \right.$$

A, B, C étant trois constantes dont les valeurs sont celles que prennent les premiers membres pour les conditions initiales.

1° Si la vitesse initiale est dirigée suivant le rayon allant du point O à la

position initiale du mobile, ses projections $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)_0$ sont proportionnelles à x_0, y_0, z_0 et les trois constantes A, B, C sont nulles ; on en déduit les relations

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z},$$

qui donnent par intégration

$$\log\frac{x}{x_0}=\log\frac{y}{y_0}=\log\frac{z}{z_0},$$

d'où

$$\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0};$$

le point matériel est constamment sur la droite joignant l'origine à sa position initiale.

2° Si la condition précédente n'est pas remplie, les constantes A, B, C ne sont pas toutes nulles. En multipliant les deux membres des équations (5) respectivement par x, y, z et les ajoutant membre à membre, on en déduit la relation

$$Ax+By+Cz=0;$$

elle exprime précisément que le point matériel reste dans un plan passant par l'origine. La dérivée de cette équation exprime, ce qu'on pouvait prévoir, que la vitesse du mobile est constamment contenue dans ce plan ; celui-ci est donc entièrement déterminé par l'origine, la position initiale du mobile et la vitesse initiale.

Le moment de la force par rapport à un axe quelconque passant par O étant nul, le mouvement de la projection du mobile sur un plan quelconque passant par l'origine a lieu suivant la loi des aires, et cela a lieu notamment dans le plan de la trajectoire elle-même ; celle-ci est donc parcourue suivant la loi des aires.

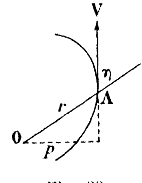


Fig. 39.

Remarque. — Le théorème du moment de la quantité de mouvement donne lieu dans le cas précédent à la remarque suivante : Le moment par rapport au point O du vecteur vitesse du point A a pour valeur le produit de la grandeur v de la vitesse par la perpendiculaire p abaissée de O sur la tangente à la trajectoire (*fig.* 39). Si η désigne l'angle de cette tangente avec le rayon vecteur OA, que nous appellerons r, le moment est encore égal à $rv\sin\eta$; on peut donc écrire l'égalité

$$rv\sin\eta=r_0v_0\sin\eta_0;$$

cette remarque permet de déterminer la grandeur de la vitesse en un point quelconque de la trajectoire lorsque celle-ci est connue.

50. Force vive. Énergie cinétique. — On appelle *force vive* d'un point matériel le produit de sa masse par le carré de sa vitesse ; c'est une grandeur scalaire qui n'est donc pas représentable par un vecteur.

On appelle *énergie cinétique* d'un point matériel la moitié de sa force vive, c'est-à-dire $\frac{1}{2}mv^2$. Un théorème important relie la force vive d'un point au travail des forces qui lui sont appliquées ; ce théorème a deux aspects, l'un sous forme différentielle, l'autre sous forme finie, qui se déduisent du reste l'un de l'autre ; on l'appelle théorème des forces vives ou de l'énergie cinétique.

La différentielle de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale au travail élémentaire $d\mathcal{T}$ de la résultante des forces qui lui sont appliquées.

Pour le démontrer, nous partirons des équations (2) n° 46 et nous les ajouterons après les avoir multipliées respectivement par dx, dy, dz, ce qui donnera

$$(6) \qquad m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right) = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Le second membre est égal au travail élémentaire de la résultante des forces appliquées au point matériel ; le premier membre est la différentielle de l'énergie cinétique, dont la valeur est

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right];$$

en effet, la différentielle de cette expression est égale au produit de sa dérivée par rapport à t par la différentielle dt de la variable, c'est-à-dire

$$m\left[\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}\right]dt,$$

et c'est bien la valeur du premier membre de l'équation (6).

On arriverait à la même conclusion en utilisant la première des équations (3),

$$m\frac{dv}{dt} = F_t,$$

et multipliant les deux membres par $vdt = ds$; on trouve ainsi la relation

$$mvdv = F_t ds,$$

dont le premier membre est la différentielle de l'énergie cinétique et le second

membre le travail élémentaire $d\mathcal{T}$. On a donc

$$d\frac{1}{2}mv^2 = d\mathcal{T}.$$

Pour arriver à la forme finie du théorème, il suffit d'intégrer les deux membres de la relation

$$d\frac{1}{2}mv^2 = d\mathcal{T}$$

entre deux instants t_0 et t, auxquels correspondent les positions A_0 et A du point matériel ; on obtient ainsi l'équation

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{A_0}^{A} Xdx + Ydy + Zdz,$$

que nous écrirons en abrégé

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \mathcal{T}_{t_0}^{t},$$

en employant le symbole $\mathcal{T}_{t_0}^{t}$ pour représenter le travail de la résultante des forces appliquées pendant l'intervalle de temps t_0t.

Nous pouvons alors énoncer le théorème des forces vives sous sa forme finie :

La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel pendant un intervalle de temps est égale au travail de la résultante des forces appliquées à ce point pendant le même intervalle de temps.

Cet énoncé est surtout utile lorsque le calcul du travail peut s'effectuer sans que l'on ait besoin de connaître la loi du mouvement. Cela a lieu en particulier si le point matériel libre est placé dans un champ dont la force dérive d'une fonction de forces U ; la connaissance de cette fonction de forces permet de trouver le travail pour un déplacement de A_0 à A ; ce travail a pour expression

$$U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0).$$

On a donc l'équation

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0)$$

ou

$$\frac{1}{2}mv^2 - U(x, y, z) = C^{te}.$$

Cette équation est une intégrale première des équations du mouvement ; on l'appelle intégrale des forces vives.

On voit que si le point matériel part avec une vitesse v_0 d'un point A_0 situé sur une surface de niveau $U = h_0$ et aboutit à un point A situé sur une

surface de niveau $U = h$, la vitesse v qu'il possède en A a une valeur indépendante du chemin A_0A :

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}(h - h_0)}.$$

Exemple. — Si un point matériel est soumis à la seule action de la pesanteur, la fonction de forces (n° 45) est égale à $-mgz$ et l'on a

$$\frac{1}{2} m(v^2 - v_0^2) = -mg(z - z_0),$$

d'où

$$v^2 = v_0^2 + 2g(z_0 - z).$$

La vitesse finale ne dépend que de la vitesse initiale et de la différence des cotes des positions initiale et finale.

CHAPITRE VIII

PROBLÈMES DE LA DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL LIBRE

51. Mouvement rectiligne. — Si un point matériel libre est soumis à une force de direction constante et si sa vitesse initiale est nulle ou parallèle à la direction de la force, le raisonnement que nous avons fait au n° 48 montre que la trajectoire du point est une droite portant constamment la force. En prenant cette droite comme axe des x, le mouvement est déterminé par une seule équation différentielle du second ordre

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X\,;$$

suivant la forme de la fonction X, l'intégration de cette équation est plus ou moins simple ; nous mentionnerons en particulier les cas suivants :

1° X est une constante ou ne dépend que du temps ; il suffit d'intégrer X deux fois successivement par rapport à t pour avoir la loi de la vitesse puis celle du mouvement.

Exemple. — *Mouvement vertical d'un point pesant,* en supposant que l'accélération de la pesanteur est constante, et en négligeant la résistance de l'air. En prenant l'axe des x suivant la verticale ascendante, l'équation du mouvement est $m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -mg$, qui fournit

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g, \qquad \frac{dx}{dt} = -gt + v_0, \qquad x = -\frac{gt^2}{2} + v_0t + x_0.$$

Si v_0 est nul ou négatif, le point se déplace constamment suivant la verticale descendante ; si v_0 est positif, le point s'élève jusqu'à ce que sa vitesse soit nulle, ce qui a lieu à l'instant $t = \frac{v_0}{g}$, et il atteint la position d'abscisse $x = x_0 + \frac{v_0^2}{2g}$; il descend ensuite et son mouvement descendant est symétrique

de son mouvement ascendant, en ce sens qu'à ses deux passages en un même point de l'espace ses vitesses sont égales et de sens contraires ; cela résulte du reste de l'équation des forces vives

$$v^2 = v_0^2 + 2g(x_0 - x).$$

Si X est déterminé graphiquement en fonction du temps, les méthodes d'intégration graphique permettront de déterminer la vitesse puis l'espace.

2° X ne dépend que de la vitesse v ; on prend comme inconnue auxiliaire $v = \frac{dx}{dt}$, et l'on a l'équation

$$\frac{mdv}{dt} = X(v), \qquad \text{ou} \qquad dt = \frac{mdv}{X(v)};$$

par intégration on obtient une relation entre v, t et une constante arbitraire ; si l'on peut résoudre cette relation par rapport à v, on obtient une équation de la forme $\frac{dx}{dt} = \Phi(t, C)$, dont l'intégration donne la loi du mouvement ; sinon on peut exprimer x en même temps que t en fonction de v en écrivant $dx = vdt = \frac{mvdv}{X(v)}$ et en intégrant.

Exemple. — Supposons qu'un point soit soumis à une seule force, qui est une résistance proportionnelle au carré de la vitesse ; nous prendrons l'axe des x suivant la vitesse initiale, l'origine à la position initiale ; nous désignerons la valeur absolue de la résistance par $\frac{mv^2}{k}$, k ayant la dimension d'une longueur. L'équation du mouvement est

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mv^2}{k}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{v^2}{k}.$$

En séparant les variables et intégrant, on a

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \frac{t}{k}, \qquad \text{d'où} \qquad v = \frac{dx}{dt} = \frac{kv_0}{k + v_0 t};$$

en intégrant une deuxième fois et tenant compte de $x_0 = 0$, on a, pour équation du mouvement,

$$x = k \log\left(1 + \frac{v_0 t}{k}\right).$$

3° X ne dépend que de l'abscisse du mobile et est par suite une fonction $X(x)$. Si l'équation différentielle est simple, par exemple linéaire, on l'intègre directement ; dans le cas contraire, le calcul du travail $\int X dx$ permet d'utiliser l'équation de l'énergie cinétique

$$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = \int_{x_0}^{x} X(x)dx,$$

qui est une intégrale première de l'équation du mouvement ; on la retrouve du reste en appliquant le procédé classique d'intégration des équations de la forme $m\frac{d^2x}{dt^2} = X(x)$; on prend $v = \frac{dx}{dt}$ comme inconnue auxiliaire, et l'on pose

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{vdv}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}v^2\right).$$

Nous verrons plus loin des exemples de ce cas. Si X est donné graphiquement en fonction de x, les méthodes de calcul graphique permettent de déterminer v^2, puis v, en fonction de x.

52. Mouvement vertical d'un point pesant dans un milieu résistant. — Nous supposerons que la valeur absolue de la résistance est $mk|v|$, k ayant la dimension de l'inverse d'un temps ; et nous choisirons l'axe des x dirigé suivant la verticale ascendante ; si le mouvement est ascendant, v est positif, et la projection de la force résistante est $-mkv$; si le mouvement est descendant, la vitesse est négative, la force de résistance est dirigée vers le haut et sa projection est encore $-mkv$; on a donc dans les deux cas la même équation du mouvement

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg - mkv.$$

En introduisant l'inconnue v, elle donne l'équation linéaire

$$\frac{dv}{dt} + kv = -g,$$

dont la solution générale est $v = Ce^{-kt} - \frac{g}{k}$; avec les conditions initiales on a $v_0 = C - \frac{g}{k}$, d'où $C = v_0 + \frac{g}{k}$, et

$$v = \frac{dx}{dt} = \left(v_0 + \frac{g}{k}\right)e^{-kt} - \frac{g}{k}. \tag{1}$$

Une nouvelle intégration donne la loi du mouvement

$$x = -\frac{g}{k}t - \frac{1}{k}\left(v_0 + \frac{g}{k}\right)e^{-kt} + C_1,$$

C_1 étant une constante ; si l'on suppose $x_0 = 0$, et si l'on fait $t = 0$, on a $C_1 = \frac{1}{k}\left(v_0 + \frac{g}{k}\right)$, et

$$x = -\frac{g}{k}t + \frac{1}{k}\left(v_0 + \frac{g}{k}\right)(1 - e^{-kt}). \tag{2}$$

On serait arrivé au même résultat en intégrant directement l'équation

différentielle linéaire du second ordre

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} = -g.$$

L'allure du mouvement est caractérisée par l'équation (1) fournissant la vitesse ; si v_0 est égal à $-\frac{g}{k}$, v est constante et le mouvement est uniforme ; si v_0 n'est pas égal à $-\frac{g}{k}$, v s'approche indéfiniment de cette valeur et le mouvement tend à devenir uniforme. La figure 40 donne la représentation graphique de la vitesse dans les cas 1° $v_0 > 0$, 2° $0 > v_0 > -\frac{g}{k}$ et 3° $v_0 < -\frac{g}{k}$; il serait facile de tracer la représentation graphique de la loi du mouvement.

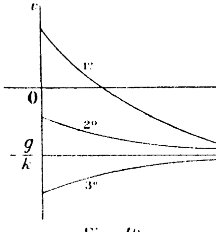


Fig. 40.

Dans le cas d'une autre loi de résistance, il faut généralement établir deux équations du mouvement, l'une pour le mouvement ascendant, l'autre pour le mouvement descendant ; c'est ce qui a lieu pour une loi de résistance telle que mkv^n, l'exposant n étant un nombre entier pair ; il faut alors prendre cette quantité avec le signe — pour le mouvement ascendant, et avec le signe + pour le mouvement descendant.

53. Mouvement vibratoire, mouvement amorti. — Supposons qu'un point matériel de masse m se déplace sur Ox sous l'action d'une seule force attractive proportionnelle à la distance ; si l'on représente la valeur absolue de cette force par $ma^2|x|$, a ayant la dimension de l'inverse d'un temps (ou, ce qui revient au même, d'une vitesse angulaire), on voit que, dans tous les cas, quel que soit le signe de x, la projection de la force est $-ma^2x$; l'équation du mouvement est donc

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a^2x = 0. \tag{3}$$

L'intégration directe de cette équation linéaire du second ordre se fait en résolvant l'équation caractéristique $r^2 + a^2 = 0$, dont les racines sont $\pm ai$; la solution générale est, comme on sait,

$$x = C_1 \cos at + C_2 \sin at.$$

En introduisant les conditions initiales x_0 et v_0 pour $t = 0$, dans cette équation et sa dérivée, on a $C_1 = x_0$, $C_2 = \frac{v_0}{a}$, d'où la forme de la solution

$$x = x_0 \cos at + \frac{v_0}{a} \sin at.$$

On peut introduire un angle φ donné par les relations

$$\frac{\sin\varphi}{x_0} = \frac{\cos\varphi}{\frac{v_0}{a}} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{a^2}}}$$

et l'on trouve

$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{a^2}} \sin(at + \varphi).$$

Le mouvement, appelé vibratoire simple, est périodique entre les points d'abscisses $\pm\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{a^2}}$; la valeur absolue du radical est l'amplitude, φ la phase ; la durée de la période est $T = \frac{2\pi}{a}$; elle est indépendante des conditions initiales, et l'on dit que les oscillations sont isochrones.

Exemple. — Supposons que l'on ait $a = \frac{1}{10^{\text{sec}}}$, $x_0 = 200^{\text{cm}}$, $v_0 = 0$; on a

$$x = 200 \cos\frac{t}{10}, \qquad v = -20 \sin\frac{t}{10} ;$$

la période est $T = 20\pi = 62{,}8$ secondes.

Supposons qu'en outre de la force attractive proportionnelle à la distance, le point matériel soit soumis à une résistance proportionnelle à la vitesse, on peut représenter la projection de cette force par $-2mbv$, b ayant comme a la dimension de l'inverse d'un temps, et cette représentation est valable quel que soit le sens du mouvement. L'équation différentielle du mouvement est alors

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + a^2x = 0 ; \qquad (4)$$

elle est du second ordre à coefficients constants ; son équation caractéristique $r^2 + 2br + a^2 = 0$ a ses racines réelles si $b > a$, égales si $b = a$, imaginaires si $b < a$, ce qui est le cas le plus fréquent dans les applications.

Lorsque $b < a$, les racines de l'équation caractéristique sont

$$-b \pm i\sqrt{a^2 - b^2} ;$$

la solution générale de l'équation différentielle est

$$x = e^{-bt}(C_1 \cos\sqrt{a^2 - b^2}t + C_2 \sin\sqrt{a^2 - b^2}t),$$

C_1 et C_2 étant deux constantes arbitraires. Si l'on exprime que pour $t = 0$ on a $x = x_0$ et $\frac{dx}{dt} = v_0$, on trouve les valeurs de C_1 et C_2 en fonction des conditions initiales, et la solution prend la forme

$$x = e^{-bt}\left(x_0 \cos\sqrt{a^2 - b^2}t + \frac{v_0 + bx_0}{\sqrt{a^2 - b^2}} \sin\sqrt{a^2 - b^2}t\right).$$

Comme dans le cas précédent, on peut mettre la parenthèse sous la forme $x_e \sin(a_1 t + \varphi)$, où $a_1 = \sqrt{a^2 - b^2}$, l'amplitude x_e et la phase φ étant données par

$$x_e = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + bx_0)^2}{a_1^2}}, \qquad x_e \sin\varphi = x_0, \qquad x_e \cos\varphi = \frac{v_0 + bx_0}{a_1};$$

on a alors, pour exprimer la loi du mouvement et la vitesse,

$$x = e^{-bt} x_e \sin(a_1 t + \varphi),$$
$$v = e^{-bt} x_e [a_1 \cos(a_1 t + \varphi) - b \sin(a_1 t + \varphi)].$$

La vitesse s'annule et change de signe aux instants donnés par

$$\operatorname{tg}(a_1 t + \varphi) = \frac{a_1}{b},$$

auxquels correspondent pour x des valeurs maxima ou minima ; l'intervalle entre deux de ces instants consécutifs est $\frac{\pi}{a_1}$. On voit que le mouvement est périodique, la période étant $T_1 = \frac{2\pi}{a_1}$; les oscillations ont des amplitudes allant en diminuant, par suite de la présence du terme e^{-bt} qui tend vers zéro quand le temps t augmente indéfiniment.

La durée T_1 des oscillations complètes avec amortissement est inférieure à T, durée sans amortissement, mais l'écart est en général faible, car on a

$$T_1 = \frac{2\pi}{a}\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = T\left(1 + \frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2} + \frac{3}{8}\frac{b^4}{a^4} + \cdots\right);$$

si l'on néglige les puissances de $\frac{b}{a}$ d'exposant égal ou supérieur à 4, et si l'on remplace a par $\frac{2\pi}{T}$, on a avec une approximation suffisante

$$T_1 = T\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{bT}{2\pi}\right)^2\right], \qquad \frac{T_1 - T}{T} = \frac{1}{2}\left(\frac{bT}{2\pi}\right)^2;$$

en supposant par exemple que $b = \frac{a}{10}$, on voit que l'erreur relative commise en remplaçant T_1 par T est de l'ordre d'un demi-centième.

Les élongations successives sont égales aux valeurs absolues de x lorsque la vitesse s'annule, c'est-à-dire lorsque $a_1 t_k + \varphi = k\pi$, k prenant les valeurs successives 1, 2, ... ; les abscisses correspondantes sont

$$|x_k| = e^{-bt_k} x_e, \qquad |x_{k+1}| = e^{-bt_{k+1}} x_e, \qquad \cdots\cdots;$$

ces élongations forment une progression géométrique, car la différence

$$t_{k+1} - t_k = \frac{\pi}{a_1} = \frac{T_1}{2}$$

est constante ; la raison de la progression est $e^{-\frac{bT_1}{2}}$; la connaissance de cette raison et de la période T_1 permet de calculer le coefficient d'amortissement b.

Les deux autres cas sont moins importants que celui des vibrations amorties. Si $b = a$, les racines de l'équation caractéristique sont égales à $-a$, et la solution générale de l'équation différentielle est

$$x = e^{-at}(C_1 + C_2 t) = e^{-at}\left[x_0 + (v_0 + a x_0)t\right].$$

Si $b > a$, les racines de l'équation caractéristique sont réelles et négatives, la solution générale de l'équation différentielle est

$$x = e^{-bt}\left[C_1 \operatorname{ch}\sqrt{b^2 - a^2}\,t + C_2 \operatorname{sh}\sqrt{b^2 - a^2}\,t\right];$$

en fonction des données initiales, cette solution a la forme

$$x = e^{-bt}\left[x_0 \operatorname{ch}\sqrt{b^2 - a^2}\,t + \frac{v_0 + b x_0}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{sh}\sqrt{b^2 - a^2}\,t\right].$$

Dans ces deux cas, on peut voir, en étudiant la vitesse, que celle-ci s'annule au plus une fois et que le point matériel s'approche finalement de l'origine ; le mouvement est apériodique.

54. Mouvement vibratoire troublé par une force périodique. — Supposons qu'un point matériel se déplaçant sur Ox soit soumis, outre l'attraction proportionnelle à la distance, à une force périodique, dirigée suivant Ox, et égale à $mc \sin \omega t$, c ayant la dimension d'une accélération, et ω la dimension de l'inverse d'un temps ou d'une vitesse angulaire. S'il n'y a pas d'amortissement, l'équation du mouvement est

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a^2 x = c \sin \omega t;$$

on obtient la solution générale de cette équation en ajoutant à la solution générale de l'équation sans second membre une solution particulière de l'équation complète. Si $a \neq \omega$, on sait qu'il existe une solution particulière de la forme $\alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t$, et l'on obtient les coefficients α et β en écrivant que l'équation est satisfaite par cette solution, c'est-à-dire que l'on a identiquement

$$\alpha(a^2 - \omega^2) \sin \omega t + \beta(a^2 - \omega^2) \cos \omega t = c \sin \omega t.$$

Les termes en $\sin \omega t$ doivent avoir les mêmes coefficients dans les deux membres, de même les termes en $\cos \omega t$; on a donc $\alpha(a^2 - \omega^2) = c$, $\beta = 0$, d'où l'on tire la solution de l'équation

$$x = C_1 \cos at + C_2 \sin at + \frac{c}{a^2 - \omega^2} \sin \omega t;$$

on calcule facilement C_1 et C_2 au moyen des conditions initiales.

Lorsque a est peu différent de ω, le dernier terme représente une oscillation de grande amplitude, qui peut avoir une importance prépondérante. Lorsque a est égal à ω, le calcul précédent n'est plus valable, et il faut chercher une solution particulière de la forme $\alpha t \sin \omega t + \beta t \cos \omega t$; en écrivant que l'équation est satisfaite identiquement par cette solution, on trouve $\alpha = 0$, $-2\omega\beta = c$, d'où la solution générale

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - \frac{c}{2\omega} t \cos \omega t ;$$

le dernier terme représente une oscillation dont la phase est $\frac{\pi}{2}$, et dont l'amplitude croît indéfiniment avec le temps. On dit dans ce cas qu'il y a *synchronisme* ou *résonance*.

Dans la pratique, il y a toujours un terme d'amortissement, et l'équation différentielle du mouvement est de la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + a^2x = c \sin \omega t ;$$

ωi n'est jamais égal à une racine de l'équation caractéristique, et l'on peut toujours obtenir une solution particulière de la forme $\alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t$. En écrivant qu'elle satisfait identiquement à l'équation, on trouve

$$(a^2 - \omega^2)\alpha - 2b\omega\beta = c, \qquad (a^2 - \omega^2)\beta + 2b\omega\alpha = 0,$$

$$\alpha = \frac{c(a^2 - \omega^2)}{(a^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}, \qquad \beta = \frac{-2b\omega c}{(a^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}.$$

On obtient ainsi une solution particulière qui, dans les applications, est plus importante que la solution générale de l'équation sans second membre, car celle-ci a des amplitudes qui tendent vers zéro en raison de l'amortissement. L'amplitude de la solution provoquée par la force périodique est égale à $\frac{c}{\sqrt{(a^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}}$ et peut devenir assez grande lorsque $a - \omega$ et b sont petits.

Le cas où $a = \omega$ est celui du synchronisme ; la solution particulière est

$$\frac{-c}{2b\omega} \cos \omega t ;$$

elle a pour phase $\frac{\pi}{2}$ par rapport à la force périodique, et son amplitude est d'autant plus grande que b est plus petit ; on est amené à augmenter le coefficient d'amortissement pour diminuer cette amplitude qui peut devenir dangereuse.

55. Mouvement curviligne d'un point pesant. — Dans un espace assez restreint, la direction et l'intensité du champ de la pesanteur peuvent être considérées comme constantes si l'on néglige la résistance de l'air ; il résulte

des considérations du n° 48 que la trajectoire est une courbe plane dont le plan passe par la verticale de la position initiale et par la vitesse initiale. Il en est encore de même lorsque l'on introduit une résistance fonction de la vitesse et dirigée en chaque point suivant la tangente à la trajectoire, car les forces restent toujours dans le plan précédent. Nous supposerons dans ce qui suit que l'on néglige la résistance de l'air.

Prenons pour origine la position initiale, pour axe Oy la verticale ascendante, pour axe Ox l'horizontale dirigée suivant la composante horizontale de la vitesse initiale ; désignons par v_0 la grandeur de cette vitesse, par α l'angle qu'elle fait avec Ox ; les composantes de la vitesse initiale sont $v_0 \cos \alpha$ et $v_0 \sin \alpha$. Les équations du mouvement sont

$$(5) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g,$$

d'où, par intégration et introduction des conditions initiales,

$$(6) \qquad \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha, \qquad \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha,$$

$$(7) \qquad x = v_0 t \cos \alpha, \qquad y = \frac{-gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha.$$

On peut dire que le mouvement résulte d'un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse v_0 suivant la direction de la vitesse initiale et d'un mouvement vertical descendant uniformément accéléré, sans vitesse initiale.

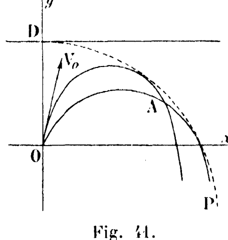


Fig. 41.

On obtient l'équation de la trajectoire en éliminant t entre les équations (6), ce qui donne la relation

$$(8) \qquad y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} ;$$

elle représente une parabole à axe vertical, rencontrant l'axe Ox en des points d'abscisses $x = 0$, $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$; on obtient les coordonnées x_1, y_1 de son sommet en cherchant dans quelle condition y est maximum, ou bien en annulant $\frac{dy}{dt}$, ce qui donne

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}, \qquad x_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}, \qquad y_1 = \frac{v_0^2}{2g} \sin \alpha.$$

Le paramètre de la parabole est $p = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}$, de sorte que l'ordonnée de sa directrice D, égale à $y_1 + \frac{p}{2} = \frac{v_0^2}{2g}$, est indépendante de α (*fig.* 41).

Si l'on se donne v_0, et si l'on cherche la valeur qu'il faut donner à α pour que la parabole passe par un point donné $A(x, y)$, il faut résoudre l'équation (8) par rapport à α ; en remplaçant $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ par $1 + \text{tg}^2\, \alpha$, et ordonnant l'équation par rapport à tg α, elle s'écrit

$$gx^2 \,\text{tg}^2\, \alpha - 2v_0^2 x \,\text{tg}\, \alpha + gx^2 + 2v_0^2 y = 0.$$

Pour que ses racines soient réelles, il faut que l'on ait

$$v_0^4 x^2 - gx^2(gx^2 + 2v_0^2 y) \geqq 0,$$

d'où

$$y < \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2};$$

il faut que y soit, pour chaque valeur de x, inférieure à l'ordonnée d'une parabole P tracée en pointillé dans la figure 41 ; cette parabole a comme foyer l'origine et comme tangente au sommet la directrice commune à toutes les trajectoires ; par tout point intérieur à P passent deux trajectoires, par tout point de P une seule et par tout point extérieur ne passe aucune trajectoire ; P est appelée *parabole de sûreté* ; on voit facilement qu'elle est tangente à toutes les trajectoires et qu'elle est leur enveloppe.

56. Mouvement d'un point matériel attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance. — Le mouvement a lieu dans un plan passant par le centre et la vitesse initiale. Si celle-ci passe elle-même par le centre, le mouvement est rectiligne et se confond avec le mouvement vibratoire simple étudié au n° 53. Si la vitesse initiale ne passe pas par le centre fixe, nous prendrons le centre comme origine O, l'axe Ox passant par la position initiale A_0 (*fig.* 42), l'axe Oy perpendiculaire à Ox dans le plan passant par O et la vitesse initiale ; nous désignerons par v_0 la grandeur de cette vitesse et par η_0 l'angle qu'elle fait avec OA_0. Si la force agissant sur un point A tel que $OA = r$ a pour valeur absolue ma^2r, ses projections sur les axes sont $-ma^2x$, $-ma^2y$, et les équations du mouvement sont

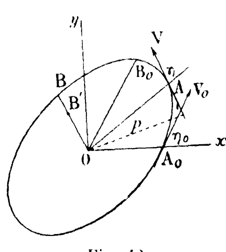


Fig. 42.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a^2x = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + a^2y = 0.$$

La solution générale de ce système est

$$x = C_1 \cos at + C_2 \sin at, \qquad y = C_3 \cos at + C_4 \sin at;$$

on détermine les constantes en fonction des conditions initiales en exprimant que pour $t=0$, x est égal à x_0, y est nul, et les composantes de la vitesse sont $v_0 \cos \eta_0$, $v_0 \sin \eta_0$, ce qui donne les équations

$$C_1 = x_0, \quad C_3 = 0, \quad aC_2 = v_0 \cos \eta_0, \quad aC_4 = v_0 \sin \eta_0 ;$$

on en déduit les expressions de x et y,

$$x = x_0 \cos at + \frac{v_0}{a} \cos \eta_0 \sin at, \qquad y = \frac{v_0}{a} \sin \eta_0 \sin at.$$

L'élimination du temps, résultant de l'introduction dans l'identité

$$\sin^2 at + \cos^2 at = 1$$

des valeurs de sin at et de cos at tirées des relations précédentes, conduit à l'équation de la trajectoire, qui est

$$\frac{(x - y \operatorname{cotg} \eta_0)^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{v_0}{a} \sin \eta_0\right)^2} = 1 ;$$

la trajectoire est une ellipse qui a pour centre l'origine O, et pour demi-diamètres conjugués le rayon vecteur initial OA_0 et le segment OB_0 égal à $\frac{v_0}{a}$ porté par une parallèle à la vitesse initiale ; c'est ce que montreraient du reste les équations du mouvement si l'on prenait comme axes de coordonnées le rayon vecteur initial et la parallèle menée par le centre à la vitesse initiale.

Les coordonnées x et y sont des fonctions périodiques du temps ; la durée de la révolution est $T = \frac{2\pi}{a}$.

Le mouvement a lieu suivant la loi des aires, et le moment du vecteur vitesse par rapport au point O est constant ; si $\vec{V}$ est le vecteur vitesse d'un point A de la trajectoire, p la distance de l'origine à ce vecteur et η l'angle qu'il fait avec OA, on a

$$vp = vr \sin \eta = v_0 p_0 = v_0 r_0 \sin \eta_0.$$

Si l'on trace le demi-diamètre OB conjugué de OA, on sait, d'après un théorème d'Apollonius, que l'aire du parallélogramme construit sur OA et OB est constant, c'est-à-dire que l'on a

$$OA \,.\, OB \sin \eta = OA_0 \,.\, OB_0 \sin \eta_0 = \frac{r_0 v_0}{a} \sin \eta_0 :$$

on en conclut que $OB = \frac{v}{a}$, $v = a \,.\, OB$, ce qui permet de construire graphi-

quement la vitesse du mobile au point A. On peut ajouter que l'hodographe est le lieu d'un point B' situé sur OB et tel que $OB' = a \cdot OB$; elle est donc une ellipse homothétique à la trajectoire.

La trajectoire peut être un cercle ; il faut et il suffit pour cela que l'on ait $\eta_0 = \frac{\pi}{2}$ et $v_0 = ar_0$.

57. Etude en coordonnées polaires du mouvement produit par une force centrale. — Il semble naturel d'étudier au moyen des coordonnées polaires r, θ le mouvement d'un point soumis à une force dont la direction passe par le centre O ; on utilise pour cela les projections de l'accélération sur le rayon vecteur Or et sur la perpendiculaire Op à ce rayon vecteur ; ces projections ont pour valeurs, d'après les formules (3) et (4) du n° 25,

$$\gamma_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \qquad \gamma_p = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right).$$

Projetons l'égalité géométrique $\vec{F} = m\vec{J}$ sur l'axe Op. Puisque la force F est centrale, sa projection F_p est nulle ; il en résulte que $m\gamma_p = 0$ et par suite que $\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0$.

L'expression $r^2\frac{d\theta}{dt}$ a donc une valeur constante ; d'où

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = C. \tag{9}$$

Cette équation est d'ailleurs l'intégrale des aires.

Projetons maintenant l'égalité $\vec{F} = m\vec{J}$ sur l'axe Or ; nous obtenons

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = F. \tag{10}$$

Les équations (9) et (10) sont les équations du mouvement.

Dans le cas où la force F a une intensité qui ne dépend que de la valeur de r, on a $F = F_r = \varphi(r)$, en sorte que le travail est égal à $m\int_{r_0}^{r}\varphi(r)dr$; il existe alors une fonction des forces égale à $m\int\varphi(r)dr$, et si l'on pose

$$\Phi(r) = \int\varphi(r)dr,$$

l'intégrale des forces vives est

$$v^2 - 2\Phi(r) = C^{te} = v_0^2 - 2\Phi(r_0),$$

ou bien

$$\frac{dr^2 + r^2d\theta^2}{dt^2} = 2\Phi(r) + h, \tag{11}$$

h étant une constante ; en remplaçant $\frac{d\theta}{dt}$ par $\frac{C}{r^2}$, on obtient une relation qui n'est autre que l'intégrale première de l'équation (10).

Enfin une troisième méthode consiste à déterminer d'abord la trajectoire du mobile ; on cherche pour cela une relation entre r et θ en éliminant le temps entre les équations (9) et (10) ; on écrit

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\theta} = -C \frac{d\frac{1}{r}}{d\theta},$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr}{dt}\right) \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} \cdot \frac{C^2}{r^2},$$

et l'on arrive à l'équation suivante due à *Binet* :

$$(12) \qquad -\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right) = \varphi(r) ;$$

lorsqu'on l'a intégrée, les équations (9), (10), ou (11) permettent ensuite d'exprimer r et θ en fonction du temps, dès lors de déterminer la loi du mouvement.

Le même calcul d'élimination de t entre l'intégrale des aires et celle des forces vives (11) donne l'équation

$$(13) \qquad v^2 = C^2\left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right] = 2\Phi(r) + h.$$

58. Exemple. — Attraction en raison inverse du carré de la distance. — Nous poserons $\varphi(r) = \frac{-\mu}{r^2}$, μ étant un coefficient constant ; nous chercherons la trajectoire en utilisant la relation (12), qui donne

$$(14) \qquad \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2}.$$

Nous avons une équation différentielle à coefficients constants, dont l'intégrale générale est

$$(15) \qquad \frac{1}{r} = \frac{\mu}{C_2} + C_1 \cos\theta + C_2 \sin\theta ;$$

elle représente une conique ayant pour foyer l'origine.

Nous serions arrivés au même résultat en calculant la fonction des forces

$$\Phi(r) = \int \frac{-\mu}{r^2} dr = \frac{\mu}{r}$$

et intégrant l'équation (13).

Pour préciser la nature de la trajectoire, nous devons exprimer les constantes C_1 et C_2 au moyen des conditions initiales, qui sont la position et la vitesse initiales : en écrivant que pour $t = 0$ la valeur (15) de r est égale à r_0, et la valeur (13) de v^2 est égale à v_0^2, on trouve les relations

$$\frac{1}{r_0} = \frac{\mu}{C^2} + C_1, \qquad v_0^2 = C^2\left(C_2^2 + \frac{1}{r_0^2}\right),$$

d'où l'on tire les valeurs de C_1 et C_2 et celle de r donnée par

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2} + \left(\frac{1}{r_0} - \frac{\mu}{C^2}\right)\cos\theta + \sqrt{\frac{v_0^2}{C^2} - \frac{1}{r_0^2}}\sin\theta,$$

la constante C étant égale à $v_0 r_0 \sin \eta_0$.

Si nous comparons cette équation à celle d'une conique de foyer O, dont le paramètre p, l'excentricité e, l'angle α de l'axe focal avec Ox sont mis en évidence et qui s'écrit

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos(\theta - \alpha)}{p} = \frac{1}{p} + \frac{e\cos\alpha}{p}\cos\theta + \frac{e\sin\alpha}{p}\sin\theta,$$

nous voyons que les éléments et la trajectoire sont donnés par

$$\frac{1}{p} = \frac{\mu}{C^2}, \qquad \frac{e\cos\alpha}{p} = \frac{1}{r_0} - \frac{\mu}{C^2}, \qquad \frac{e\sin\alpha}{p} = \sqrt{\frac{v_0^2}{C^2} - \frac{1}{r_0^2}},$$

d'où

$$p = \frac{C^2}{\mu}, \qquad \frac{e^2}{p^2} = \frac{\mu^2}{C^4} - \frac{2\mu}{r_0 C^2} + \frac{v_0^2}{C^2}.$$

La nature de la conique dépend du signe de $e^2 - 1$ ou de

$$\frac{e^2 - 1}{p^2} = \frac{1}{C^2}\left(v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}\right);$$

suivant que la vitesse initiale est inférieure, égale ou supérieure à $\sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$, la trajectoire est une ellipse, une parabole ou une hyperbole ; ce résultat ne dépend pas de la direction de la vitesse initiale. Nous pouvons ajouter que la constante h de l'intégrale des forces vives est précisément égale à $v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}$, et que, dans le cas d'une trajectoire elliptique, le demi grand axe a a pour valeur

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{-\mu}{v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}} = \frac{-\mu}{h}.$$

Pour que la trajectoire soit un cercle, il faut et il suffit que les constantes C_1 et C_2 soient nulles, ou que l'on ait

$$\frac{1}{r_0} = \frac{\mu}{C^2}, \qquad v_0^2 = \frac{C^2}{r_0^2}\,;$$

on en déduit d'une part que v_0^2 doit être égal à $\frac{\mu}{r_0}$, d'autre part, en remplaçant la constante des aires par le moment de la vitesse initiale par rapport au centre, ou par $v_0 r_0 \sin \eta_0$, que l'on doit avoir

$$v_0^2 r_0^2 = C^2 = v_0^2 r_0^2 \sin^2 \eta_0, \qquad \sin^2 \eta_0 = 1,$$

c'est-à-dire que la vitesse initiale doit être perpendiculaire au rayon vecteur initial, ce que l'on pouvait d'ailleurs prévoir.

Pour trouver la loi de variation de r en fonction du temps, nous utiliserons l'équation des forces vives, et nous y remplacerons v^2 par

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

qui est égal à $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2}$; nous aurons ainsi l'équation différentielle

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{-C^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r} + h.$$

Nous achèverons le calcul, en supposant que la trajectoire est une ellipse ; nous supposerons qu'à l'instant initial le mobile est au sommet le plus rapproché du centre d'attraction, et nous exprimerons toutes les constantes au moyen du coefficient μ, du demi grand axe a et de l'excentricité e ; d'après ce que nous avons vu, h a pour valeur $-\frac{\mu}{a}$, et C^2 est égal à $\mu p = \mu a(1-e^2)$; nous aurons ainsi l'équation

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{-\mu}{ar^2}\left[a^2(1-e^2) - 2ar + r^2\right] = \frac{\mu}{ar^2}\left[a^2e^2 - (a-r)^2\right],$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}}\, dt = \frac{r\,dr}{\pm\sqrt{a^2e^2 - (a-r)^2}}.$$

Au début du mouvement, r est minimum, puis croît avec le temps ; on doit donc prendre le signe $+$ devant le radical ; pour effectuer l'intégration, on change de variable en posant $a - r = ae \cos u$, d'où

$$r = a(1 - e\cos u), \qquad dr = ae \sin u\, du,$$

et l'équation se transforme dans la suivante

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}}\, dt = a(1 - e\cos u)\,du,$$

dont l'intégrale est (en remarquant que u s'annule avec t)

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\,t = u - e\sin u.$$

On désigne ordinairement par n le coefficient de t au premier membre ; on a donc les équations

$$(16) \qquad u - e\sin u = nt, \qquad r = a(1 - e\cos u)\,;$$

la première, appelée *équation de Kepler,* permet de calculer u en fonction de t et la seconde donne r ; la quantité $u - e\sin u$, dont la dérivée est toujours positive, est une fonction croissante de u, et prend la valeur nt pour une et une seule valeur de u ; lorsque u varie de 0 à 2π, t varie de 0 à $T = \frac{2\pi}{n}$, r d'abord égal à $a(1 - e)$ croît, passe par un maximum $a(1 + e)$, décroît et reprend à la fin sa valeur initiale ; le mobile décrit ainsi l'ellipse tout entière une seule fois pendant le temps T, puis continue son mouvement d'une manière périodique en décrivant de nouveau l'ellipse dans le même temps T, et ainsi de suite.

L'angle u, qu'on appelle *anomalie excentrique,* n'est autre que le paramètre angulaire φ du point de l'ellipse où passe le mobile, car si x_1 est l'abscisse de ce point comptée à partir du centre de la courbe, on sait que l'on a $x_1 = a\cos\varphi$, et $r = a - ex = a(1 - e\cos\varphi)$.

Quant à la variation de θ en fonction du temps, elle est donnée par l'équation de la trajectoire

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta},$$

qui donne, en exprimant r au moyen de u,

$$\cos\theta = \frac{a(1 - e^2) - r}{er} = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u}.$$

En calculant $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}$, on trouve

$$(17) \qquad \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\operatorname{tg}\frac{u}{2},$$

de sorte qu'il est possible de calculer θ pour chaque valeur de t.

59. Application au mouvement des planètes autour du Soleil. — *Kepler* a déduit des observations faites par *Tycho-Brahé* les lois suivantes :

1° *La trajectoire d'une planète est une courbe plane et les aires balayées*

par le rayon vecteur allant du centre du Soleil au centre de cette planète sont proportionnelles aux temps employés à les décrire.

2° *La trajectoire du centre d'une planète est une ellipse dont le centre du Soleil occupe un foyer.*

3° *Les carrés des temps des révolutions sidérales des différentes planètes sont proportionnels aux cubes des grands axes de leurs orbites.*

De ces lois, Newton a déduit celle de la force qui produit le mouvement des planètes ; de la première, qui est la loi des aires, on déduit que la force passe constamment par le centre du Soleil ; de la deuxième, qui est la loi du mouvement elliptique, on déduit la valeur de la force ; l'équation (12) donne en effet

$$\varphi(r) = -\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right),$$

et si l'on y remplace r par $\frac{p}{1+e\cos\theta}$, on trouve $\varphi(r) = -\frac{C^2}{pr^2}$; on pose $\frac{C^2}{p} = \mu$, ce qui donne $\varphi(r) = -\frac{\mu}{r^2}$; la force est attractive et sa valeur absolue est celle de $m\varphi(r)$, c'est-à-dire $\frac{m\mu}{r^2}$, m étant la masse de la planète ; on voit qu'elle est en raison inverse du carré de la distance.

Pour interpréter la troisième loi de Kepler, remarquons que la constante des aires est le double de l'aire balayée par le rayon vecteur dans l'unité de temps, ou le double du quotient de l'aire balayée dans un temps quelconque par ce temps ; si nous envisageons l'aire de l'ellipse entière, elle est égale à πab, et est décrite dans le temps T d'une révolution sidérale ; la constante des aires C est donc égale à $\frac{2\pi ab}{T}$; le coefficient μ d'attraction est égal à

$$\mu = \frac{C^2}{p} = \frac{4\pi^2a^2b^2}{T^2p} = \frac{4\pi^2a^3}{T^2};$$

en vertu de la troisième loi de Kepler, ce coefficient est une constante ayant la même valeur pour toutes les planètes. On peut donc énoncer cette loi :

Chaque planète est sollicitée vers le centre du Soleil par une force proportionnelle à sa masse et en raison inverse du carré de sa distance à ce centre.

Cette force est égale à $\frac{m\mu}{r^2}$, μ ayant la même valeur pour toutes les planètes.

Inversement, si l'on part de cette loi et si l'on cherche la loi du mouvement du centre d'une planète quelconque, supposée seule en présence du Soleil, on a à résoudre le problème du n° précédent, et l'on retrouve comme

conséquences les lois de Kepler; les équations (16) et (17) permettent de déterminer à chaque instant la position du centre de la planète.

Newton a étendu la loi précédente au mouvement des comètes, dont la trajectoire peut être une ellipse, une parabole ou même une hyperbole; il l'a étendue au mouvement des satellites, par exemple à celui du centre de la Lune autour du centre de la Terre; il a remarqué que la force attractive exercée par la Terre sur la Lune est de même nature que celle que la Terre exerce sur toute masse placée près de sa surface et tombant en chute libre. En effet, soit a_1 le rayon de l'orbite lunaire supposée circulaire, et T_1 le temps de la révolution sidérale de la Lune autour de la Terre; une masse m_1 placée au centre de la Lune subit de la part de la Terre une force attractive égale à

$$\frac{\mu m_1}{a_1^2} = \frac{4\pi^2 a_1^3}{T_1^2} \cdot \frac{m_1}{a_1^2} = \frac{4\pi^2 a_1}{T_1^2} m_1 ;$$

la même masse placée près de la surface de la Terre, à une distance de son centre égale au rayon R de la Terre, subit une force attractive qui, comme nous le verrons plus tard, diffère très peu du poids $m_1 g$; le rapport de ces forces est égal à $\frac{4\pi^2 a_1}{T_1^2 g}$; en remplaçant a_1 par 60R, T_1 par $27^j 7^h 43^m$ ou 39343.60 secondes, R par $\frac{2 \times 10^7}{\pi}$ en mètres et g par $9{,}8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}$, on constate que le rapport est à peu près égal au rapport des carrés des distances R et a_1; un calcul plus rigoureux justifie complètement l'hypothèse de Newton.

Newton a été ainsi amené à énoncer la loi de la gravitation universelle qui s'exprime ainsi :

Si deux points matériels quelconques de masses m et m' sont placés à une distance r l'un de l'autre, chacun d'eux est soumis à une force dirigée vers l'autre et égale à $\frac{fmm'}{r^2}$.

Le coefficient f a la même valeur pour tout l'univers et est égal, dans le système C. G. S., à $67 . 10^{-9}$.

CHAPITRE IX

ÉQUILIBRE ET MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SOUMIS A DES LIAISONS

60. Forces de liaison. — Lorsqu'un point matériel n'est pas susceptible de se déplacer d'une manière quelconque dans l'espace, on dit qu'il est soumis à des liaisons. Les exemples les plus fréquents sont les suivants :

1° Le point est assujetti à rester sur une ligne ; un petit anneau entourant une tige mince ou bien une petite sphère placée dans un canal de même diamètre en offrent des exemples. La ligne peut être invariable ou se déplacer et même se déformer dans la suite du temps suivant une loi donnée.

2° Le point est assujetti à rester sur une surface ; une petite sphère placée entre deux surfaces parallèles dont la distance est égale au diamètre de la sphère en offre un exemple. La surface peut être invariable ou se déplacer et se déformer dans la suite du temps suivant une loi donnée.

3° Le point est assujetti à rester d'un seul côté d'une surface, et peut se déplacer soit sur cette surface soit dans une des régions de l'espace limitées par elle ; une petite sphère placée dans une cavité limitée par une surface, un point matériel attaché à l'extrémité d'un fil inextensible de masse négligeable, dont l'autre extrémité est fixe, en offrent des exemples ; dans le second cas le point matériel peut rester sur une sphère dont le centre est le point fixe et le rayon la longueur du fil, il peut rentrer dans l'intérieur de cette sphère si le fil cesse d'être rectiligne et tendu.

4° Comme cas particulier, si le point matériel reste de lui-même dans un plan fixe, et est assujetti à rester d'un côté d'une surface, on peut dire qu'il reste d'un côté de la ligne section de la surface par le plan fixe.

Dans les deux premiers cas, on dit que la liaison est *bilatérale* ; dans les deux derniers, qu'elle est *unilatérale*.

Supposons qu'un point matériel A, de masse m, occupant des positions

successives de l'espace ne puisse se déplacer dans toutes les directions autour de ces positions ; l'accélération J de son mouvement (nulle s'il reste en repos) ne satisfait pas généralement à l'égalité géométrique $m\vec{J} = \vec{F}$, où $\vec{F}$ désigne la résultante des forces données appliquées au point ; par définition, on appelle *force de liaison* le vecteur $\vec{F_1}$ qu'il faut adjoindre à $\vec{F}$ pour que l'on ait à chaque instant l'égalité géométrique

$$m\vec{J} = \vec{F} + \vec{F_1}. \tag{1}$$

Cette égalité permet de déterminer la force de liaison à chaque instant si le mouvement du mobile est connu. Tout se passe comme si ce mobile était libre, la liaison étant supprimée, et s'il était soumis à la résultante de $\vec{F}$ et $\vec{F_1}$; on dit encore que la force $\vec{F_1}$ remplace la liaison. Dans le cas où le point reste sur une ligne ou sur une surface, on dit que $\vec{F_1}$ est la *réaction* de la ligne ou de la surface sur le point matériel ; en vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, la force égale et opposée à la réaction $\vec{F_1}$ est l'action du point sur la ligne ou la surface ; on peut remarquer qu'elle est la résultante de $\vec{F}$ et de la force d'inertie $(-m\vec{J})$; on l'appelle souvent *pression*. Dans le cas où le point est à l'extrémité d'un fil inextensible, et que celui-ci est tendu, on peut dire que la force de liaison $\vec{F_1}$ remplace le fil ; la force égale et opposée à $\vec{F_1}$ est l'action du point matériel sur le fil, et elle représente la tension du fil à son extrémité.

Plaçons-nous dans le cas d'un point assujetti à rester sur une ligne ou sur une surface ; l'expérience montre que dans les cas usuels la direction de la réaction $\vec{F_1}$ s'écarte peu de celle d'une normale à la ligne ou à la surface, et qu'elle s'en rapproche d'autant plus que les corps en contact sont plus polis. A la limite on suppose que la réaction est normale, on dit alors que les corps sont parfaitement polis et que les liaisons sont sans frottement. Lorsqu'on ne se place pas dans ce cas, on dit qu'il y a frottement ; la réaction peut être décomposée dans une force normale à la courbe ou à la surface et une force tangentielle ; on constate que cette dernière est en sens contraire du mouvement qui a lieu ou qui tend à se produire ; cette force tangentielle constitue la force de frottement.

Supposons maintenant que la liaison soit unilatérale et que le point ne puisse se déplacer que dans une région limitée par une ligne ou une surface. S'il est sur la limite, son action sur la ligne ou la surface doit être une force pressante, dirigée vers l'extérieur de la région où il peut rester ; la réaction, c'est-à-dire la force de liaison, est égale et contraire à l'action ; elle doit donc être dirigée vers l'intérieur de la région. Lorsqu'on veut étudier l'équilibre ou le mouvement d'un point soumis à des liaisons unilatérales, on suppose qu'il est placé sur la limite de la région permise ; on introduit la force de liaison,

et l'on fait l'hypothèse que cette force est dirigée vers l'intérieur ; on développe les calculs et l'on détermine ensuite la force de liaison ; si elle remplit bien les conditions introduites au début, la solution trouvée convient au problème posé et le point reste sur la courbe ou la surface ; si le calcul final indique que la force de liaison est dirigée au contraire vers l'extérieur, la solution trouvée ne convient pas, et il faut supposer que le point se déplace en quittant la ligne ou la surface ; il se comporte alors comme un point libre, et la force de liaison n'existe plus. C'est lorsque la réaction s'annule que l'on passe d'une hypothèse à l'autre et que le problème change de nature. Les mêmes considérations s'appliquent à l'étude du mouvement d'un point matériel placé à une extrémité d'un fil flexible et inextensible dont l'autre extrémité est fixe ; pour que le fil reste tendu, il faut que la tension soit dirigée vers le prolongement du fil, ou que la force de liaison soit dirigée du point matériel vers le point fixe.

Nous allons résoudre quelques problèmes, en supposant que les liaisons sont sans frottement ; nous examinerons plus loin le cas où il y a frottement.

61. Equilibre d'un point matériel mobile sans frottement sur une ligne ou une surface fixes. — Nous pouvons supposer que le point est libre à condition de remplacer la liaison par la réaction de la ligne ou de la surface ; il est en équilibre dans une position A si, placé au repos dans cette position, il y reste au repos ; il est nécessaire et suffisant pour cela que l'ensemble des forces données et de liaison qui lui sont appliquées admette une résultante nulle.

Il faut et il suffit dès lors que la résultante $\vec{F}$ des forces données et la force de liaison $\vec{F_1}$ soient égales et directement opposées. Comme $\vec{F_1}$ est par hypothèse normale à la ligne ou à la surface, il faut que $\vec{F}$ lui soit également normale, et cette condition est suffisante, car si elle est remplie, il existera toujours une force $\vec{F_1}$ égale et opposée à $\vec{F}$; $\vec{F_1}$ sera la réaction, et $\vec{F}$ sera la pression.

On voit que l'on obtiendra les conditions d'équilibre en exprimant que la résultante des forces données est normale à la ligne ou à la surface, ou que la somme de leurs projections sur la tangente à la ligne ou le plan tangent à la surface est nulle. Par exemple, si un point assujetti à rester sur une surface est soumis à une seule force émanant d'un centre fixe, ses positions d'équilibre seront les pieds des normales abaissées du centre sur la surface.

On dit qu'une position d'équilibre A est stable si, en plaçant le point matériel sans vitesse initiale dans une position A′ voisine de A, le mouvement qu'il prend le maintient dans une région très petite entourant le point A ; dans le cas contraire, on dit que A est une position d'équilibre instable. C'est par l'étude des petits mouvements ou par l'application d'un théo-

rème général dont nous parlerons plus tard qu'on se rend compte de la stabilité de l'équilibre ; on peut cependant dans certains cas simples utiliser des remarques évidentes. Si l'on suppose par exemple un point mobile sur une ligne et en équilibre dans une position A, on étudie la résultante des forces qui lui sont appliquées lorsqu'on le place dans une position voisine A', et l'on évalue la projection de cette résultante sur la tangente en A' ; si cette projection est dirigée de A' vers A, l'équilibre est stable en A, sinon il est instable.

62. Mouvement d'un point sur une ligne. — La méthode générale consiste à utiliser l'équation géométrique fondamentale

$$(1) \qquad m\vec{J} = \vec{F} + \vec{F_1}$$

comme si le point était libre, et soumis à l'action de la résultante $\vec{F}$ des forces données et à la force de liaison $\vec{F_1}$. Si, par rapport à un système d'axes fixes, x, y, z désignent les coordonnées du mobile, X, Y, Z ; X_1, Y_1, Z_1 les projections de $\vec{F}$ et de $\vec{F_1}$, la relation (1) se traduit par les équations

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + X_1, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + Y_1, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + Z_1 ; \end{aligned} \right.$$

en leur adjoignant les relations définissant la ligne, et la condition pour que la force $\vec{F_1}$ lui soit normale, on a le nombre voulu d'équations pour calculer en fonction du temps les coordonnées du mobile et les projections X_1, Y_1, Z_1 de la force de liaison inconnue.

Généralement, les coordonnées x, y, z des points de la ligne s'expriment au moyen d'un paramètre, que nous appellerons q (et qui peut être l'arc ou l'une des coordonnées), par des fonctions (pouvant renfermer le temps si la ligne est mobile) ; nous pouvons supposer que les projections X, Y, Z de la force $\vec{F}$ sont exprimées au moyen de q et dans certains cas de $\frac{dq}{dt}$ et de t. La condition pour que la force de liaison soit normale à la ligne s'exprime par l'équation

$$(3) \qquad X_1\frac{\partial x}{\partial q} + Y_1\frac{\partial y}{\partial q} + Z_1\frac{\partial z}{\partial q} = 0.$$

L'élimination de X_1, Y_1, Z_1 entre les relations (2) et (3) fournit l'équation

$$(4) \qquad m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{d^2z}{dt^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial q}\right) = X\frac{\partial x}{\partial q} + Y\frac{\partial y}{\partial q} + Z\frac{\partial z}{\partial q},$$

qui conduit à une équation différentielle du second ordre entre le paramètre q et le temps t ; elle sert à déterminer le mouvement du mobile. Lorsqu'on a effectué l'intégration on obtient la solution générale

$$q = F(t, C_1, C_2)$$

exprimant q au moyen du temps et de deux constantes arbitraires ; celles-ci peuvent être déterminées au moyen des conditions initiales, par exemple la position initiale et la vitesse initiale du point matériel. Lorsque q est ainsi déterminé, on peut calculer les coordonnées x, y, z du mobile ; enfin les équations (2) fournissent les projections de la force de liaison.

Dans le cas assez rare où la ligne est donnée par l'intersection de deux surfaces dont les équations

$$(5) \qquad f(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0$$

peuvent renfermer le temps, nous remarquerons que la force de liaison $\overrightarrow{F_1}$ en un point doit être contenue dans le plan des normales aux deux surfaces en ce point ; ses projections peuvent donc s'exprimer sous la forme

$$(6) \qquad X_1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad Y_1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad Z_1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial z} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

où λ et μ sont deux paramètres encore inconnus ; en les transportant dans les équations (2), nous obtiendrons les relations

$$(7) \qquad \begin{cases} m \dfrac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ m \dfrac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial y} + \mu \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ m \dfrac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial z} + \mu \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{cases}$$

Les équations (7) et (5) constituent cinq équations permettant de calculer x, y, z, puis λ et μ en fonction du temps et de deux constantes arbitraires ; le problème est ainsi résolu.

63. Cas où la ligne est fixe. Cas particulier d'un point pesant. — Lorsque la ligne est invariable, elle constitue la trajectoire du mobile ; il est alors avantageux d'employer les équations intrinsèques du mouvement (n° 46) ou le théorème des forces vives (n° 50).

Les équations intrinsèques sont obtenues en projetant l'égalité géométrique $m\overrightarrow{J} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F_1}$ sur la tangente, la normale principale et la binormale à la trajectoire en chaque position du mobile ; la projection de la force de liaison $\overrightarrow{F_1}$ sur la tangente est nulle ; nous désignerons par F_{1n} et F_{1b} ses projections

sur la normale principale et la binormale ; les trois équations intrinsèques du mouvement sont dès lors (n° 46)

$$(8) \qquad m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2} = F_t, \qquad m\frac{v^2}{\rho} = F_n + F_{1n}, \qquad 0 = F_b + F_{1b} ;$$

la première sert à déterminer la loi du mouvement, les deux autres servent ensuite à déterminer la force de liaison au moyen de ses projections sur la normale principale et sur la binormale à la ligne donnée en chaque point.

Le théorème des forces vives s'applique au mouvement du point matériel, que l'on peut supposer libre et soumis à l'action de $\vec{F}$ et $\vec{F_1}$; la liaison étant sans frottement, la force de liaison $\vec{F_1}$ est constamment normale au déplacement de son point d'application et son travail est nul ; on peut donc écrire la relation de l'énergie cinétique en ne conservant que le travail de la force $\vec{F}$, sous la forme différentielle ou la forme finie :

$$(9) \qquad d\frac{1}{2}mv^2 = d\text{Travail de } \vec{F} = F_t ds = Xdx + Ydy + Zdz,$$

$$(10) \quad \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = \text{Travail de } \vec{F} = \int_{s_0}^{s} F_t ds = \int_{A_0}^{A} Xdx + Ydy + Zdz.$$

La forme finie (10) est très utile lorsqu'il est possible d'évaluer le travail de la force $\vec{F}$ sans connaître le mouvement, en particulier lorsque cette force ne dépend que des coordonnées x, y, z du mobile ou du paramètre q qui fixe sa position sur la trajectoire, ou bien encore lorsque cette force dépend d'une fonction des forces. Nous pouvons ajouter que la recherche de la force de liaison $\vec{F_1}$ exige que l'on revienne ensuite soit aux équations générales (2) soit aux dernières équations (8).

Il faut bien remarquer que les équations (8), (9), (10) ne sont valables que si la ligne donnée est fixe, car dans le cas contraire la force $\vec{F_1}$ n'est pas normale à la trajectoire du point matériel. Il est facile de montrer, par un raisonnement analogue à celui du n° 50, que l'équation (4), la première des équations (8) et l'équation (9) rentrent l'une dans l'autre.

Nous allons appliquer le théorème des forces vives à l'étude du mouvement d'un point matériel mobile sans frottement sur une courbe fixe sous la seule action de la pesanteur.

Nous prendrons, sauf avis contraire, comme direction de l'axe Oz celle de la verticale ascendante ; les projections de la force appliquée au point matériel sont alors $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -mg$; l'équation (10) donne alors la relation

$$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = \int_{z_0}^{z} Zdz = -mg(z - z_0),$$

ou

$$(11) \qquad v^2 = v_0^2 + 2g(z_0 - z).$$

En posant $a = z_0 + \frac{v_0^2}{2g}$, on peut l'écrire sous la forme

$$(12) \qquad v^2 = 2g(a - z).$$

Les coordonnées x, y, z des points de la ligne donnée sont des fonctions connues d'un paramètre q, qui est souvent la coordonnée z ; le premier membre de l'équation (12), c'est-à-dire la somme $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ s'exprime alors sous la forme $\psi(q)\left(\frac{dq}{dt}\right)^2$, et l'équation différentielle du mouvement est

$$(13) \qquad \sqrt{\psi(q)}\frac{dq}{dt} = \pm\sqrt{2g(a-z)},$$

où z est une fonction connue de q ; les variables se séparent immédiatement, et l'on peut par une quadrature calculer t en fonction de q, d'où inversement q en fonction de t et d'une constante arbitraire qui peut être déterminée au moyen des conditions initiales ; le problème est ainsi résolu.

Il y a lieu de préciser le signe que l'on doit choisir devant le radical qui entre dans l'équation du mouvement. La fonction $\psi(q)$ est toujours positive et, au début du mouvement, z, égal à z_0, est égal ou inférieur à a, les radicaux sont donc réels ; lorsque t croît à partir de zéro, le sens de la vitesse initiale, ou du mouvement qui commence, permet de dire si q croît ou décroît ; dans le premier cas, on prendra le signe $+$ devant le radical, dans le second cas le signe $-$, et l'on conservera ce signe tant que la vitesse ne s'annulera pas ; cela ne peut se produire que si z prend la valeur a.

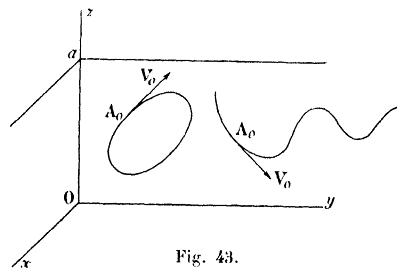


Fig. 43.

Si, en suivant le sens du mouvement, z ne peut jamais atteindre la valeur a, ce qui a lieu par exemple quand tous les points de la ligne sont au-dessous du plan de cote a (*fig.* 43), le mouvement continue sans arrêt toujours dans le même sens ; dans le cas particulier où la courbe est fermée et tout entière au-dessous de la cote a, le mobile repasse à son point de départ et, d'après l'équation (12), y reprend sa vitesse initiale ; le mouvement est révolutif et les révolutions successives ont la même durée.

Si, en suivant le sens du mouvement, z atteint la valeur a en un point A_1 où la tangente à la courbe n'est pas parallèle au plan xOy (*fig.* 44), le mobile décrit l'arc A_0A_1 en un temps fini. Pour le voir, nous supposerons que le paramètre q est l'arc s de la courbe compté à partir de A_0 positivement dans le sens du mouvement initial, et nous appellerons s_1 la longueur de l'arc A_0A_1 ; l'équation (12) donne

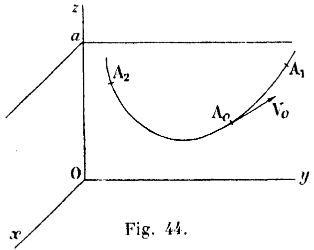


Fig. 44.

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(a-z)},$$

$$t = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{2g(a-z)}},$$

z étant supposé remplacé par sa valeur en fonction de s.

Le temps employé par le mobile pour parcourir l'arc A_0A_1 est égal à l'intégrale prise entre les limites 0 et s_1 ; le dénominateur de l'élément différentiel s'annule pour $z = a$, c'est-à-dire pour $s = s_1$, mais le rapport $\frac{a-z}{s_1-s}$ reste fini, car le rapport des dérivées $\frac{dz}{ds}$ n'est pas nul pour $s = s_1$, la tangente en A_1 n'étant pas horizontale ; par suite le dénominateur est d'ordre infinitésimal $\frac{1}{2}$ par rapport à l'infiniment petit principal $s_1 - s$ et l'intégrale de 0 à s_1 est finie.

Lorsque le mobile arrive en A_1, sa vitesse s'annule ; mais la composante tangentielle F_t de la force à laquelle il est soumis n'étant pas nulle, le point se met en mouvement et z décroît à partir de a ; il y a changement de sens du mouvement, donc changement de signe de la vitesse ; il faut modifier le signe du radical de l'équation (13) et intégrer l'équation ainsi transformée ; le mobile se déplace de A_1 vers A_0, et ne s'arrête que si z peut reprendre la valeur a ; cela peut ne pas avoir lieu, ou bien peut se présenter pour un point A_2. Si la tangente en ce point n'est pas horizontale, le mobile s'arrête en A_2, puis revient de A_2 vers A_1, s'arrête en A_1 et ainsi de suite.

Le mouvement est alors constitué par une série d'oscillations de A_1 à A_2 et de A_2 à A_1, et l'on peut vérifier que ces oscillations ont la même durée ; cela résulte encore de la remarque suivante : les vitesses que possède le mobile lorsqu'il passe en un point A sont égales et de même signe, ou égales et de signes contraires, suivant le sens de son mouvement, car elles sont égales à

$$\pm\sqrt{2g(a-z)}.$$

Supposons enfin qu'en suivant le sens du mouvement initial, z puisse

atteindre la valeur a en un point A_1 où la tangente à la trajectoire est horizontale ; nous allons montrer qu'en général le mobile s'approche de A_1 mais n'y parvient qu'au bout d'un temps infini. En reprenant le raisonnement du cas précédent, et supposant que le paramètre q soit encore l'arc s, le rapport $\frac{a-z}{s_1-s}$ tend vers zéro en même temps que sa dérivée par rapport à s, $\frac{dz}{ds}$, lorsque z tend vers a (en vertu de la règle de *l'Hopital*) ; on peut donc écrire

$$a - z = \varphi(s)(s_1 - s)^n$$

où n est supérieur à l'unité, et où $\varphi(s)$ ne s'annule pas pour $s = s_1$; dès lors

$$t = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{2g\varphi(s)}(s_1 - s)^{\frac{n}{2}}}.$$

Si $n < 2$, l'intégrale reste finie quand s tend vers s_1 ; mais si $n \geqslant 2$, l'intégrale devient infinie ; c'est ce qui a lieu dans le cas d'un cercle, et généralement dans le cas d'une courbe quelconque dont le point A_1 n'est pas un point singulier.

64. Pendule simple. — Considérons un point matériel de masse m assujetti à rester sur un cercle de centre O et de rayon l placé dans un plan vertical (*fig.* 45) et soumis à la seule action de la pesanteur. La liaison peut être réalisée soit en plaçant le point à l'extrémité d'une tige rigide OA de masse négligeable, de longueur l, dont l'autre extrémité reste fixée en O, le point A est alors assujetti à rester sur le cercle ; soit en remplaçant la tige par un fil inextensible de longueur l ; si le fil est tendu, le point reste sur le cercle, mais si le fil n'est pas tendu, le point peut se déplacer à l'intérieur du cercle et la liaison est unilatérale. Dans ces deux cas on dit que l'on a réalisé un pendule simple.

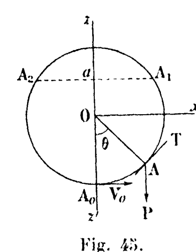


Fig. 45.

Nous prenons l'origine au point O, l'axe Oz vertical dirigé suivant la verticale ascendante et l'axe Ox horizontal dans le plan du cercle, comme paramètre de déplacement l'angle z'OA formé par le rayon OA avec la verticale descendante ; on a alors

$$z = l \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -l\cos\theta.$$

Nous allons établir l'équation du mouvement en supposant que le point matériel ne quitte pas le cercle ; quelle que soit la nature de son mouvement, révolutif ou oscillatoire, nous sommes certains qu'il passe par le point le plus

bas A_0 de sa trajectoire ; nous pouvons supposer, sans nuire à la généralité, que l'on prenne ce point comme origine des arcs, comme origine du temps l'instant où le mobile passe en A_0, et que sa vitesse initiale v_0 en ce point soit dirigée dans le sens des arcs croissants, celui de Ox vers Oz.

Si l'on utilise la première des équations intrinsèques (8), on doit prendre $s = l\theta$, et la projection F_t de la force de la pesanteur sur la tangente en A dans le sens des arcs croissants a pour valeur

$$F_t = z \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -mg \sin\theta ;$$

l'équation du mouvement est alors

$$(14) \qquad ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta, \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{-g}{l}\sin\theta.$$

Si l'on utilise l'équation des forces vives (11) ou (12) on doit y remplacer v par $l\dfrac{d\theta}{dt}$, z par $-l\cos\theta$, z_0 par $-l$ et a par $z_0 + \dfrac{v_0^2}{2g}$; on a alors l'équation

$$(15) \qquad l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = v_0^2 - 2gl(1 - \cos\theta) ;$$

la dérivation de cette équation (15) conduirait du reste à l'équation (14); elles jouent le même rôle dans l'étude du mouvement.

L'intégration de l'une ou de l'autre des équations précédentes ne peut se faire à l'aide des fonctions élémentaires et exige l'introduction des fonctions elliptiques ; un cas simple est celui où v_0 est très petit ; d'après l'équation (15), la vitesse s'annule pour une valeur de θ très petite, que nous appellerons α et qui est donnée par

$$(16) \qquad v_0^2 = 4gl\sin^2\frac{\alpha}{2} ;$$

le mouvement est oscillatoire, les oscillations sont de faible amplitude et l'on peut dans une première approximation remplacer $\sin\theta$ par θ. En faisant ce changement dans l'équation (14), elle devient

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0,$$

équation différentielle du second ordre dont la solution générale est

$$\theta = C_1\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + C_2\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t,$$

C_1 et C_2 étant des constantes. En écrivant que θ est nul à l'instant initial et a pour maximum α, on obtient la solution particulière

$$\theta = \alpha\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t ;$$

le mouvement est oscillatoire entre les angles α et $-\alpha$; il est périodique ; la durée d'une oscillation simple s'obtient en écrivant que l'angle sous le signe sinus varie de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{3\pi}{2}$, et elle est égale à $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; la durée d'une oscillation double, qui est celle de la période du mouvement, a pour valeur $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; ces durées sont indépendantes de l'amplitude α, ce qui montre que *les très petites oscillations du pendule sont isochrones.*

Lorsque v_0 a une valeur quelconque, c'est l'équation (15) que nous utiliserons ; le mouvement est révolutif ou oscillatoire suivant que le plan de cote $a = z_0 + \frac{v_0^2}{2g} = -l + \frac{v_0^2}{2g}$ ne coupe pas ou coupe le cercle, c'est-à-dire suivant que a est supérieur ou inférieur à l ou bien v_0 supérieur ou inférieur à $2\sqrt{gl}$.

Dans le premier cas, le mouvement est révolutif; la durée du mouvement entre le point A_0 et un point A quelconque est fournie par l'intégration de l'équation (15), qui donne

$$(17) \qquad dt = \frac{l d\theta}{\sqrt{v_0^2 - 2gl(1-\cos\theta)}} = \frac{l d\theta}{\sqrt{v_0^2 - 4gl\sin^2\frac{\theta}{2}}};$$

le changement de variable $\sin\frac{\theta}{2} = u$ conduit, pour θ compris entre 0 et π, à la formule

$$dt = \frac{2l\,du}{\sqrt{(1-u^2)(v_0^2 - 4glu^2)}} = \frac{2l}{v_0} \cdot \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

où $k = \frac{2\sqrt{gl}}{v_0}$, et l'on est ramené à une intégrale elliptique ; la durée de la révolution s'obtient en effectuant l'intégration par rapport à θ entre les limites 0 et 2π ou bien en effectuant l'intégration par rapport à u entre les limites 0 et 1 et doublant le résultat.

Dans le deuxième cas, le mouvement est oscillatoire entre des angles α et $-\alpha$ fournis par l'équation (16) ; en introduisant cet angle dans l'équation (17), elle devient

$$(18) \qquad dt = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{d\theta}{2\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}};$$

le changement de variable $\sin\frac{\theta}{2} = u \sin\frac{\alpha}{2}$ conduit, pour θ compris entre 0 et α, à la formule

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

où $k = \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{v_0}{2\sqrt{gl}}$; on est encore ramené à une intégrale elliptique. La durée du mouvement entre le point A_0 le plus bas et le point A_1 correspondant à l'écart maximum s'obtient en effectuant l'intégration par rapport à θ entre 0 et α, ou bien par rapport à u entre 0 et 1 ; la durée d'une oscillation simple en est le double et la période du mouvement, ou durée d'une oscillation double, est deux fois plus grande.

Les tables de fonctions elliptiques permettent de calculer l'intégrale

$$K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

pour chaque valeur de k ; en l'absence de tables, on peut développer K en série ordonnée suivant les valeurs de k ; nous allons effectuer le calcul en partant de l'équation (18) et posant $\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\varphi$, ce qui conduit à

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi}} = \sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi\right)^{-\frac{1}{2}} d\varphi.$$

En développant en série la puissance d'après la formule du binome généralisée, on a

$$\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\sin^4\frac{\alpha}{2}\sin^4\varphi + \cdots;$$

pour obtenir la durée du mouvement de A_0 à A_1, il faut intégrer par rapport à φ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; on est ainsi conduit au calcul des intégrales définies de $\sin^2\varphi$, $\sin^4\varphi$, ... entre ces limites ; on sait que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\cdot\frac{\pi}{2};$$

on en conclut que la durée T d'une oscillation simple, égale au double de l'intégrale de la série, a pour valeur

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\frac{\alpha}{2} + \cdots\right].$$

Lorsque α est très petit, on peut remplacer le sinus par l'arc ; si l'on néglige alors les puissances de α d'exposant égal ou supérieur à 4, on obtient la formule

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right)$$

donnant une approximation suffisante dans les applications usuelles.

Nous avons encore à envisager le cas intermédiaire où le plan de cote a est tangent au cercle, ce qui a lieu quand $v_0 = 2\sqrt{gl}$; l'équation (17) devient alors

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{d\theta}{2 \cos \frac{\theta}{2}}, \qquad \text{d'où} \qquad t = \sqrt{\frac{l}{g}} \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{4}\right);$$

on voit bien que t augmente indéfiniment quand θ s'approche de π, c'est-à-dire quand le mobile s'approche du point le plus haut du cercle.

Nous allons calculer la force de liaison $\overrightarrow{F_1}$ en utilisant la deuxième des équations intrinsèques (8); la réaction du cercle, comptée positivement vers le centre O, est égale à

$$F_1 = \frac{mv^2}{\rho} - F_n = \frac{mv^2}{l} + mg \cos \theta = \frac{2mg(a-z)}{l} - \frac{mgz}{l}.$$

Si l'on désigne par P la valeur absolue du poids mg du point matériel, on a

$$F_1 = P \frac{2a - 3z}{l}.$$

Examinons le cas de la liaison unilatérale, le point matériel pouvant se déplacer sur le cercle ou dans son intérieur, et étant lancé du point A_0 le plus bas avec une vitesse tangentielle v_0 ; il restera sur le cercle tant que F_1 aura une valeur positive, c'est-à-dire tant que z sera inférieur à $\frac{2}{3} a$.

Si a est négatif, cette condition est toujours remplie, car z est inférieur à a ; si a est positif, z peut atteindre la valeur $\frac{2}{3} a$, à la condition que celle-ci soit inférieure à l; on arrive donc aux conclusions suivantes : Le point restera sur le cercle si $a < 0$ ou $a > \frac{3}{2} l$, c'est-à-dire si v_0^2 est inférieur à $2gl$ ou supérieur à $5gl$. La force de liaison s'annulera si a est positif et inférieur à $\frac{3}{2} l$, c'est-à-dire si v_0^2 est compris entre $2gl$ et $5gl$; dans ce cas, le point atteindra sur le cercle un point A′ de cote $\frac{2}{3} a$, puis quittera le cercle et décrira alors une parabole intérieure au cercle comme un point pesant (*fig.* 46) ; cette parabole sera tangente au cercle au point A′, car la vitesse du mobile est la même sur les deux trajectoires en A′, elle lui est de plus osculatrice, car la deuxième équation (8) devient, lorsque $F_1 = 0$, $m\frac{v^2}{\rho} = F_n$; elle est valable

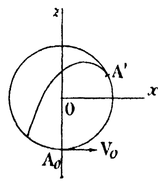


Fig. 46.

en A′ pour le cercle et la parabole ; comme la vitesse est la même, les deux courbes ont même rayon de courbure, et elles sont dès lors osculatrices.

65. Mouvement d'un point sur une surface. — Comme au nº 62, la méthode générale consiste à utiliser l'égalité géométrique $m\vec{J} = \vec{F} + \vec{F_1}$, qui se traduit par les équations

$$(2) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = X + X_1, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + Y_1, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + Z_1,$$

à leur adjoindre l'équation de la surface $f(x, y, z) = 0$, celle-ci pouvant renfermer le temps, et les conditions exprimant que la force de liaison est normale à la surface ; on peut écrire que X_1, Y_1, Z_1 sont proportionnels aux dérivées de f par rapport à x, y, z ou bien que l'on a

$$X_1 = \lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad Y_1 = \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad Z_1 = \lambda\frac{\partial f}{\partial z},$$

λ étant un coefficient inconnu ; on a ainsi autant d'équations qu'il en faut pour déterminer en fonction du temps les coordonnées x, y, z et le coefficient λ, d'où l'on déduit la force de liaison.

Exemple. — *Mouvement d'un point matériel assujetti à rester sur un plan incliné fixe et soumis à la seule action de la pesanteur.*

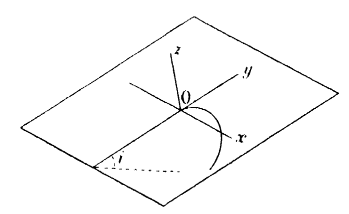


Fig. 47.

Prenons pour origine la position initiale du mobile (*fig.* 47), l'axe des z suivant la normale au plan, dirigée vers le haut, l'axe des x suivant l'horizontale du point O et l'axe des y suivant la ligne de plus grande pente du plan, dirigée aussi vers le haut ; désignons par i l'angle du plan donné avec le plan horizontal ; les projections du poids sont 0, $-mg \sin i$, $-mg \cos i$, celles de la force de liaison sont 0, 0, F_1, les équations du mouvement sont

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg \sin i,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg \cos i + F_1 ;$$

l'équation de la surface est $z = 0$. Les deux premières équations sont iden-

tiques à celles du mouvement d'un point pesant libre (n° 55) dans lesquelles on remplacerait g par g sin i ; le mobile se déplace suivant la ligne de plus grande pente d'un mouvement uniformément varié, ou bien décrit une parabole dans le plan. La troisième équation, où l'on fait $z = 0$, donne

$$F_1 = mg \cos i = P \cos i.$$

Revenons à l'étude générale. Lorsque la surface donnée est fixe, les équations générales peuvent être utilement remplacées, comme dans le cas d'une ligne fixe, par des équations particulières. Les équations intrinsèques sont moins avantageuses que dans le cas d'une ligne, parce que la trajectoire du mobile n'est pas connue à l'avance ; elles peuvent fournir cependant des renseignements intéressants, et nous allons indiquer comment elles s'appliquent au problème actuel.

Soient (*fig.* 48) A une position quelconque du mobile, L sa trajectoire située sur la surface, AT, AN, AB la tangente, la normale principale et la binormale à L, AQ la normale à la surface, AP la perpendiculaire à AT dans le plan tangent à la surface, et θ l'angle des deux normales AN, AQ. La force de liaison $\overrightarrow{F_1}$ est dirigée suivant la normale AQ ; nous désignerons par F_t, F_p, F_q les projections de la force $\overrightarrow{F}$ sur AT, AP, AQ.

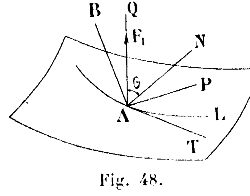


Fig. 48.

Le système des trois vecteurs égaux à $m\frac{dv}{dt}$, $m\frac{v^2}{\rho}$, 0 et portés par AT, AN, AB est équivalent au système des deux vecteurs $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{F_1}$; nous écrirons que les projections de ces deux systèmes sur AT, AP, AQ sont respectivement égales, ce qui fournit les trois relations

$$(19) \qquad m\frac{dv}{dt} = F_t, \qquad \frac{mv^2}{\rho}\sin\theta = F_p, \qquad \frac{mv^2}{\rho}\cos\theta = F_q + F_1 ;$$

ce sont les trois équations intrinsèques du mouvement. La dernière permet de calculer la force de liaison ; on peut mettre cette équation sous une autre forme en introduisant le rayon de courbure R de la section normale de la surface par le plan TAQ ; d'après le théorème de Meusnier, on a $\rho = R\cos\theta$; la dernière équation s'écrit alors

$$\frac{mv^2}{R} = F_q + F_1.$$

Mentionnons le cas particulier où aucune force F n'agit sur le point matériel ; on a alors $\frac{dv}{dt} = 0$, le mouvement est donc uniforme ; puis $\sin\theta = 0$, le plan osculateur à la courbe est donc en chaque point normal à la surface. Cette dernière pro-

priété caractérise les lignes de la surface appelées *géodésiques* ; on démontre qu'une ligne géodésique passant par deux points de la surface est plus courte qu'une ligne voisine passant par les deux points, comme cela a lieu pour les droites d'un plan et les grands cercles d'une sphère.

Le théorème le plus utile pour l'étude du mouvement d'un point sur une surface fixe est celui des forces vives, parce que la force de liaison est constamment normale à la trajectoire de son point d'application et que son travail est nul ; il suffit donc d'écrire les équations (9) ou (10). Si l'on peut calculer le travail sans connaître le mouvement, en particulier si la force $\vec{F}$ ne dépend que de la position du mobile et dépend d'une fonction des forces, on obtient une intégrale première du mouvement.

66. Mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution. Cas d'un point pesant. — Le théorème des forces vives ne donne qu'une équation indépendante de la force de liaison ; une deuxième équation est nécessaire pour déterminer le mouvement. Un cas important, où il est facile de former cette deuxième équation sans recourir à la méthode générale, est celui où la surface est de révolution ; la force de liaison rencontre l'axe de cette surface, et son moment par rapport à cet axe est constamment nul. Il suffira donc d'appliquer l'équation du moment de la quantité de mouvement par rapport à cet axe (n° 47).

Il y a alors avantage à prendre comme axe des z l'axe de la surface et à utiliser les coordonnées semi-polaires r, θ, z ; l'équation du moment cinétique s'écrit alors

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\frac{d\theta}{dt}\right) = \mathrm{N}, \tag{20}$$

N étant le moment de $\vec{F}$ par rapport à Oz. Avec les mêmes coordonnées, l'énergie cinétique du point est

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{dr^2 + r^2d\theta^2 + dz^2}{dt^2}$$

et le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ a pour valeur

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz = (x\mathrm{Y} - y\mathrm{X})d\theta + \mathrm{Z}dz = \mathrm{N}d\theta + \mathrm{Z}dz\ ;$$

enfin l'équation de la surface est de la forme $f(r, z) = 0$. En utilisant l'équation des forces vives, soit sous forme différentielle soit sous forme finie, on a ainsi trois équations permettant de calculer r, z, θ en fonction du temps ; l'une des équations générales ou la troisième des équations intrinsèques permet ensuite de trouver la force de liaison.

Un cas particulier que l'on rencontre fréquemment est celui où la force $\vec{F}$

rencontre constamment l'axe ou lui est parallèle ; son moment N est alors nul, et l'équation (20) conduit à une intégrale première qui n'est autre que la loi des aires relative au mouvement de la projection du mobile sur le plan xOy ; cette intégrale est

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C = r_0 v_0 \cos(V_0, T_0), \tag{21}$$

la constante C étant le moment constant de la vitesse par rapport à l'origine, ou bien encore, comme on le voit facilement, le produit par le rayon vecteur r de la projection de la vitesse $\vec{V}$ sur la tangente au parallèle de son point d'application ; si (V, T) est cet angle, on a bien

$$C = rv \cos(V, T) = r_0 v_0 \cos(V_0, T_0).$$

L'équation de l'énergie cinétique se simplifie parce que $N = 0$, et s'écrit

$$d\frac{1}{2}mv^2 = Zdz.$$

Si Z ne dépend que des coordonnées du mobile, on peut intégrer les deux membres, et écrire

$$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = \int_{z_0}^{z} Zdz = U(r, \theta, z) - U(r_0, \theta_0, z_0),$$

$$\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2}{dt^2} = v_0^2 + \frac{2}{m}\left[U(r, \theta, z) - U(r_0, \theta_0, z_0)\right]. \tag{22}$$

En adjoignant à (21) et (22) l'équation de la surface $f(r, z) = 0$ on a trois équations entre r, θ, z et t ; on peut alors diriger le calcul de différentes façons ; si l'on élimine z et t, on a l'équation différentielle de la projection sur le plan des xy de la trajectoire du mobile ; si l'on élimine au contraire θ et r ou z, on obtient z ou r en fonction du temps, et l'équation (21) donne ensuite θ.

C'est généralement ce dernier procédé que l'on emploie lorsque l'axe de la surface est vertical et que le point est soumis à la seule action de la pesanteur ; alors $Z = -mg$, $U = -mgz$, et l'équation (22) devient

$$\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2}{dt^2} = v_0^2 + 2g(z_0 - z) ;$$

on peut mettre le second membre sous la forme $2g\,(a - z)$, comme au n° 63. En remplaçant $\frac{d\theta}{dt}$ par sa valeur tirée de (21), on obtient

$$\frac{dr^2 + dz^2}{dt^2} + \frac{C^2}{r^2} = v_0^2 + 2g(z_0 - z) ; \tag{23}$$

on exprime généralement r en fonction de z, et l'on obtient une équation diffé-

rentielle de la forme

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \varphi(z),$$

dont l'intégration se ramène aux quadratures ; on trouve ensuite r par l'équation de la surface, et θ par l'équation (21). Remarquons que $\frac{d\theta}{dt}$ garde un signe constant ; par suite le mouvement angulaire de la projection du mobile a toujours le même sens.

67. Pendule sphérique. — Nous allons appliquer ces considérations à l'étude du mouvement d'un point matériel assujetti à rester sur une sphère de centre O et de rayon l ; comme au n° 64 nous prendrons comme origine le point O et comme direction de Oz celle de la verticale ascendante ; l'équation de la surface est

$$r^2 + z^2 = l^2,$$

qui donne $rdr = -zdz$; en remplaçant r et dr par leurs valeurs dans l'équation (23), on a l'équation différentielle

$$l^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left[v_0^2 + 2g(z_0 - z)\right](l^2 - z^2) - C^2,$$

dont nous désignerons le second membre par $\varphi(z)$; on en tire

$$dt = \frac{ldz}{\pm\sqrt{\varphi(z)}}.$$

Au début du mouvement, le signe à prendre devant le radical est celui de $\left(\frac{dz}{dt}\right)_0$; il est donné par les conditions initiales, sauf si la vitesse initiale est horizontale ; nous examinerons plus loin ce cas particulier ; on conserve ce signe tant que $\frac{dz}{dt}$ ne s'annule pas, c'est-à-dire tant que z n'atteint pas une racine du polynome $\varphi(z)$. Lorsque z atteint une telle racine, il passe par un maximum ou un minimum, et sa variation change de sens ; il faut changer le signe du radical, et utiliser la nouvelle équation jusqu'à ce que z passe de nouveau par une racine du polynome, et ainsi de suite.

La quadrature qui donne t en fonction de z ne peut être effectuée à l'aide des fonctions élémentaires et se ramène à des intégrales elliptiques ; il est possible cependant de préciser l'allure du mouvement en recherchant les racines de

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= 2g(a - z)(l^2 - z^2) - C^2 \\ &= \left[v_0^2 + 2g(z_0 - z)\right](l^2 - z^2) - (l^2 - z_0^2)v_0^2 \cos^2 (V_0, T_0).\end{aligned}$$

Nous supposons que z_0 n'est pas égal à $\pm l$ et que la vitesse initiale n'est pas tangente au méridien, sinon le mobile se déplacerait suivant un grand cercle de la sphère comme un pendule simple; nous supposons aussi que la vitesse initiale n'est pas tangente au parallèle de la position initiale, de sorte que l'angle (V_0, T_0) n'est pas égal à 0 ni à π. L'équation $\varphi(z) = 0$ a ses trois racines réelles, car les résultats de substitution de $-\infty$, $-l$, z_0, $+l$, $+\infty$ ont respectivement les signes de

$$-\infty, \; -C^2, \; v_0^2(l^2 - z_0^2)\sin^2(V_0, T_0), \; -C^2, \; +\infty;$$

l'équation a donc une racine réelle z_1 comprise entre $-l$ et z_0, une autre z_2 comprise entre z_0 et l, et une troisième supérieure à l.

Si, pour fixer les idées, la vitesse initiale est dirigée vers le bas, z décroît de z_0 à z_1, puis croît de z_1 à z_2, décroît ensuite de z_2 à z_1 et ainsi de suite; le mouvement se fait donc entre les deux parallèles de cotes z_1 et z_2 suivant la trajectoire $A_0A_1A_2A_1'A_2'\ldots$ qui est tangente à ces deux parallèles (*fig.* 49). Comme nous l'avons remarqué, θ varie toujours dans le même sens; on peut constater facilement que deux arcs consécutifs tels que A_1A_2, A_2A_1' sont symétriques par rapport au méridien du point A_2 et sont parcourus dans des temps égaux.

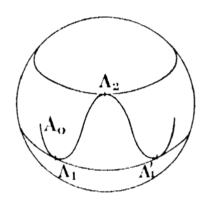


Fig. 49.

Si la vitesse initiale est dirigée suivant la tangente au parallèle initial, $\sin(V_0, T_0)$ est nul et z_0 est racine de l'équation $\varphi(z) = 0$; celle-ci a une autre racine z_1 ou z_2 comprise entre $-l$ et z_0 ou entre z_0 et l; z reste compris entre z_0 et cette autre racine, et la grandeur de cette dernière indique quel signe on doit prendre devant le radical au début du mouvement.

Un cas important est celui où z_0 est racine double de l'équation $\varphi(z) = 0$; il faut d'abord pour cela que $\sin(V_0, T_0)$ soit nul, puisque z_0 annule la dérivée

$$\varphi'(z) = -2g(l^2 - z^2) - 2z\left[v_0^2 + 2g(z_0 - z)\right],$$

c'est-à-dire que l'on ait

$$v_0^2 z_0 + g(l^2 - z_0^2) = 0, \qquad v_0^2 = \frac{-gr_0^2}{z_0},$$

ce qui exige que z_0 soit négatif. Comme on a dans ce cas

$$l^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \varphi(z) = 2g(z - z_0)^2(z - z_3)$$

et que $z - z_3$ est négatif, cette égalité ne peut avoir lieu que si z reste constamment égal à z_0, comme on devait s'y attendre puisque z_1 et z_2

deviennent égaux à z_0 ; de plus v reste constamment égal à v_0 et le mobile décrit d'un mouvement uniforme le parallèle du point initial ; on dit que le mouvement est *stationnaire.*

La détermination de la force de liaison $\overrightarrow{F_1}$ se fait soit par la troisième équation intrinsèque, soit par la troisième équation générale du mouvement,

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + Z_1 ;$$

le premier membre se déduit de l'équation

$$l^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2g(a-z)(l^2-z^2) - C^2,$$

qui, dérivée par rapport à t, fournit la relation

$$l^2\frac{d^2z}{dt^2} = -g(l^2-z^2) - 2gz(a-z) ;$$

au second membre, Z est égal à $-mg = -P$, et Z_1 est égal à $\frac{-F_1z}{l}$; on déduit de là, tous calculs faits,

$$F_1 = \frac{P}{l}(2a-3z).$$

C'est la même formule que celle qui a été établie dans le cas du pendule simple (n° 64) ; nous pourrions en tirer les mêmes conséquences.

Dans le cas où le point matériel s'éloigne très peu du point le plus bas de la sphère, on peut étudier son mouvement d'une manière approchée suffisante dans la pratique. Prenons comme origine O' le point de la sphère de cote $-l$, comme axes $O'x'y'z'$ deux droites rectangulaires situées dans le plan tangent à la sphère, et le rayon du point O' ; les cosinus directeurs de la normale en un point sont $\frac{-x'}{l}$, $\frac{-y'}{l}$, $\frac{l-z'}{l}$; il en résulte que les équations du mouvement sont

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = -F_1\frac{x'}{l},$$

$$m\frac{d^2y'}{dt^2} = -F_1\frac{y'}{l},$$

$$m\frac{d^2z'}{dt^2} = -mg + F_1\frac{l-z'}{l}.$$

L'équation de la surface $x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2lz' = 0$ donne

$$z' = l - \sqrt{l^2 - x'^2 - y'^2}.$$

En supposant très petites les coordonnées x', y' et négligeant leurs carrés, on voit que z' est négligeable, ce qui revient à remplacer la surface par son

plan tangent en O′ aux environs de ce point ; la troisième équation donne alors $F_1 = mg$ et les deux autres deviennent

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{-gx'}{l}, \qquad \frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{-gy'}{l};$$

leur solution générale est

$$x' = C_1 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + C_2 \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t,$$

$$y' = C_3 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + C_4 \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t;$$

on voit que le point matériel décrit une ellipse de centre O, et la durée de sa révolution est $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; cette durée est la même que dans le cas du pendule simple.

68. Equilibre et mouvement d'un point gêné en tenant compte du frottement. — Considérons un point matériel assujetti à rester sur une ligne ou sur une surface et soumis à l'action de forces dont la resultante est $\vec{F}$; nous supposons qu'il peut seulement glisser sans rouler, comme le ferait un petit cube posé sur un plan avec lequel il reste en contact par une face. Comme nous l'avons dit au n° 60, la force de liaison $\vec{F_1}$ n'est normale à la ligne ou à la surface que dans le cas limite où les surfaces en contact sont parfaitement polies ; dans la réalité $\vec{F_1}$ est inclinée sur la normale, et peut être décomposée en deux forces, l'une $\vec{N}$ normale, l'autre $\vec{T}$ tangentielle (*fig.* 50), cette dernière étant appelée force de frottement. Les expériences faites dans les circonstances habituelles ont conduit aux résultats suivants :

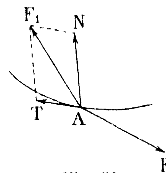


Fig. 50.

1° Si un point matériel au repos est soumis à une force $\vec{F}$ variable en grandeur et direction et s'il reste en équilibre, la force $\vec{F_1}$ est égale et opposée à $\vec{F}$; l'équilibre subsiste tant que la force de frottement T est égale ou inférieure à fN, et le mouvement commence dès que $T > fN$, f étant un coefficient constant appelé *coefficient de frottement au départ*.

2° Si un point matériel est en mouvement, la force de frottement T est dirigée suivant la tangente à la trajectoire, dans le sens opposé à la vitesse, et l'on a $T = f'N$, f' étant un coefficient constant appelé *coefficient de frottement pendant le mouvement*.

Les coefficients f et f' sont, dans les limites ordinaires, indépendants de la grandeur des forces ainsi que de la vitesse du mouvement ; ils sont aussi

indépendants de l'étendue des surfaces en contact, mais ont des valeurs caractéristiques de la nature de ces surfaces ; ils sont ordinairement peu différents l'un de l'autre, f' étant légèrement inférieur à f, et nous admettrons qu'ils sont égaux pour des surfaces de même nature. Ces résultats supposent toutefois que les surfaces sont nettes et sèches ; si elles sont humides ou graissées, les lois du frottement ne sont plus les mêmes, on conserve toutefois le nom de coefficient de frottement au quotient des deux composantes T et N. Par exemple pour des surfaces métalliques nettes et sèches, f est compris entre 0,15 et 0,20 ; pour des surfaces lubrifiées par la graisse ou l'huile, f est compris entre 0,03 et 0,05.

Remarquons qu'à la limite de l'équilibre, et pendant le mouvement, la force de liaison $\vec{F}_1$ fait avec la normale un angle φ et que $\operatorname{tg} \varphi = f$; φ est appelé *angle de frottement* ; par exemple pour $f = 0{,}15$ on a $\varphi = 8^\circ 30'$. Pendant le repos, $\vec{F}_1$ fait avec la normale contenue dans le plan TAF_1 un angle inférieur ou au plus égal à l'angle de frottement. Cette remarque permet de résoudre géométriquement certains problèmes d'équilibre d'un point sur une surface ; comme la résultante $\vec{F}$ des forces données est alors égale et opposée à $\vec{F}_1$, $\vec{F}$ doit se trouver à l'intérieur ou sur la surface d'un cône dont l'axe est normal à la surface, et dont les génératrices font avec cette normale un angle égal à l'angle de frottement ; ce cône est appelé *cône de frottement*. Il faut de plus remarquer que si la liaison est bilatérale, $\vec{F}$, qui est une force pressante, doit être dirigée vers l'extérieur de la région où peut se déplacer le point matériel ; le cône de frottement a alors une seule nappe ayant pour axe la normale extérieure.

L'étude du mouvement d'un point matériel lorsqu'il y a frottement est un problème généralement compliqué, sauf dans le cas où l'on sait que la trajectoire est rectiligne ; on peut utiliser soit les équations générales soit les équations intrinsèques ; l'équation de l'énergie cinétique n'élimine pas la force de liaison, car cette force travaille. La force de liaison doit satisfaire à la condition que sa composante tangentielle T est égale à fN, et est portée par la tangente à la trajectoire, en sens contraire de la vitesse.

69. Equilibre et mouvement d'un point pesant posé sur un plan incliné. — Etudions l'équilibre d'un point A soumis à son poids $\vec{P}$ et à une force donnée $\vec{Q}$.

Nous utiliserons la remarque relative au cône de frottement, et nous distinguerons deux cas suivant que l'angle i du plan incliné avec le plan horizontal est inférieur ou supérieur à l'angle de frottement.

Dans le premier cas, $i < \varphi$ (*fig.* 51), le poids $\vec{P}$ est intérieur au cône de frottement ; le point est déjà en équilibre sous la seule action de son poids ;

si l'on introduit une autre force $\vec{Q}$, pour qu'il y ait équilibre il faut et il suffit que l'extrémité F du vecteur résultant de $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ soit intérieure au cône de frottement ; il suffit donc de joindre P à un point quelconque F intérieur à ce cône, et de tracer le vecteur $\vec{AQ}$ égal et parallèle à $\vec{PF}$. On peut remarquer que les plus petites forces provoquant le mouvement vers le bas ou le haut sont égales et parallèles aux normales PF_1 et PF_2 menées de P à la surface du cône ; les forces ainsi obtenues $\vec{Q_1}$ et $\vec{Q_2}$ sont dans le plan vertical contenant la ligne de plus grande pente et font avec cette ligne un angle égal à l'angle φ de frottement.

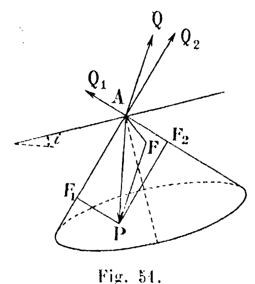


Fig. 51.

Dans le second cas, $i > \varphi$ (*fig.* 52), le vecteur $\vec{P}$ est extérieur au cône de frottement ; le point matériel n'est pas en équilibre sous l'action de son poids. Si l'on joint le point P à un point quelconque F intérieur au cône, le vecteur $\vec{Q}$ égal et parallèle à $\vec{PF}$ maintiendra le point en équilibre ; si l'on trace les normales au cône PF_1, PF_2 issues de P, les vecteurs $\vec{Q_1}$ et $\vec{Q_2}$ égaux et parallèles à ces normales représentent la plus petite force empêchant le point de glisser vers le bas, et la plus petite force produisant le mouvement vers le haut ; $\vec{Q_1}$ et $\vec{Q_2}$ font encore l'angle φ avec la ligne de plus grande pente. Il faut toutefois que F_2 soit sur la nappe du cône placée au-dessous du plan.

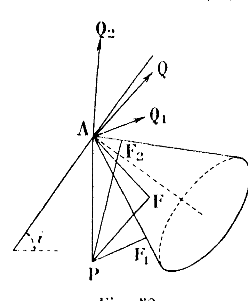


Fig. 52.

Nous allons indiquer comment on peut résoudre par le calcul le problème précédent en supposant, pour simplifier, que $\vec{Q}$ soit dirigée suivant la ligne de plus grande pente du plan ; nous choisirons l'axe des x suivant cette ligne, vers le haut et l'axe des y suivant la normale au plan (*fig.* 53) ; nous introduirons les deux composantes T et N de la force de liaison $\vec{F_1}$ et nous écrirons que le système des forces $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{F_1}$ est en équilibre en annulant la somme de leurs projections sur Ox et Oy, ce qui donne

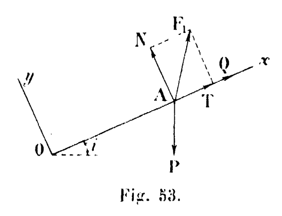


Fig. 53.

$$Q + T - P \sin i = 0, \qquad N - P \cos i = 0.$$

En écrivant que T est compris entre $-fN$ et $+fN$, nous aurons des inégalités fournissant les conditions d'équilibre ; il est avantageux d'écrire que T est égal à $f_1 N$, f_1 pouvant varier de $-f$ à $+f$, ce qui donne

$$P \sin i - Q = f_1 P \cos i, \qquad Q = P(\sin i - f_1 \cos i).$$

Nous allons en dernier lieu étudier le mouvement d'un point posé sur un plan incliné, soumis à la seule action de la pesanteur, et animé d'une vitesse initiale nulle ou dirigée suivant une ligne de plus grande pente du plan ; le mouvement se fait alors sur cette ligne, car les forces et la vitesse initiale sont dans le plan vertical qui les contient.

Il faut distinguer deux cas suivant le sens du mouvement ; si celui-ci a lieu vers le bas, la force de liaison $\overrightarrow{F_1}$ est placée comme dans la figure 53 ; elle fait avec la normale un angle égal à l'angle de frottement φ ; si le mouvement a lieu vers le haut, la force de liaison est de l'autre côté de la normale, en faisant encore avec celle-ci un angle égal à φ ; nous choisirons généralement les axes comme dans la figure 53.

1er cas : *Mouvement vers le bas.* — Les équations du mouvement sont

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = T - P \sin i, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = N - P \cos i;$$

l'équation de la surface $y = 0$ donne $N = P \cos i$; et la force de frottement est alors égale à $T = fN = fP \cos i$; on en déduit l'équation du mouvement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g(\sin i - f \cos i) = -g\frac{\sin(i-\varphi)}{\cos \varphi}.$$

Le mouvement est uniformément varié ; le vecteur accélération est dirigé vers le bas si $i > \varphi$, dirigé vers le haut si $i < \varphi$, et nul si $i = \varphi$. En désignant par γ le second membre de l'équation précédente, l'intégration donne les relations

$$v = v_0 + \gamma t, \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{\gamma t^2}{2},$$

v_0 ayant par hypothèse une valeur négative ou nulle.

Si l'on avait pris l'axe des x dirigé positivement vers le bas, l'accélération du mouvement aurait eu pour valeur

$$g(\sin i - f \cos i) = \frac{g \sin(i-\varphi)}{\cos \varphi},$$

et la vitesse initiale aurait été prise positive ou nulle.

2e cas : *Mouvement vers le haut.* — Il faut changer le sens de T et écrire $T = -fN = -fP \cos i$; l'équation du mouvement est

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g(\sin i + f \cos i) = -g\frac{\sin(i+\varphi)}{\cos \varphi},$$

le mouvement est uniformément retardé, l'accélération est toujours négative, et si γ' est sa valeur absolue, l'intégration donne

$$v = v_0 - \gamma' t, \qquad x = x_0 + v_0 t - \frac{\gamma' t^2}{2},$$

v_0 étant positif. Le mobile s'arrête au bout du temps $t = \frac{v_0}{\gamma'}$, en un point d'abscisse $x_1 = x_0 + \frac{v_0^2}{2\gamma'}$. Si $i < \varphi$, le mobile reste en repos en ce point ; si $i > \varphi$, il redescend, mais son mouvement n'est plus fourni par les mêmes équations ; il faut reprendre celles du premier cas.

CHAPITRE X

MOUVEMENTS RELATIFS D'UN POINT MATÉRIEL

---

70. Egalité géométrique fondamentale; théorème des forces vives dans le mouvement relatif. — Proposons-nous d'étudier l'équilibre relatif et le mouvement relatif d'un point matériel par rapport à un système animé d'un mouvement d'entraînement connu. Nous supposons donc, comme au n° 33, qu'un point A a dans un système S rapporté à des axes $Oxyz$ un déplacement relatif défini par les variations des coordonnées x, y, z et que le système S a dans un système S_1 rapporté à un trièdre $O_1x_1y_1z_1$ un mouvement d'entraînement déterminé.

Par rapport au système fixe S_1 on a l'égalité géométrique fondamentale

$$m\vec{J}_a = \vec{F}, \tag{1}$$

$\vec{F}$ étant la résultante des forces données et de liaison ; mais ce que l'on veut déterminer, c'est l'accélération relative $\vec{J}_r$ dont on déduira, par intégration, le mouvement relatif.

D'ailleurs la règle de composition des accélérations donne

$$\vec{J}_a = \vec{J}_e + \vec{J}_r + \vec{J}_c.$$

En multipliant les deux membres par la masse m et en tenant compte de l'égalité (1), on obtient

$$\vec{F} = m\vec{J}_e + m\vec{J}_r + m\vec{J}_c$$

et par suite

$$m\vec{J}_r = \vec{F} + (-m\vec{J}_e) + (-m\vec{J}_c). \tag{2}$$

Cette égalité géométrique a la même forme que l'égalité fondamentale de la dynamique à condition d'ajouter à la résultante $\vec{F}$ des forces données et de liaison les deux vecteurs $(-m\vec{J}_e)$ et $(-m\vec{J}_c)$; ces deux vecteurs jouent le même rôle que des forces et s'appellent respectivement force d'inertie d'entraînement et force centrifuge composée, ou force de Coriolis.

En résumé, *on peut considérer le trièdre mobile comme s'il était fixe, à condition d'adjoindre aux forces données et de liaison la force d'inertie d'entraînement et la force de Coriolis.*

En particulier, le théorème des forces vives s'applique au mouvement relatif, à condition d'ajouter au travail des forces données et de liaison le travail des deux forces complémentaires. Tous ces travaux doivent d'ailleurs être évalués dans le mouvement relatif; les travaux élémentaires correspondent au déplacement élémentaire relatif qui, d'après la définition même de la vitesse relative V_r, a pour valeur $\vec{V_r} \times dt$. Il convient de remarquer que le travail de la force de Coriolis est nul ; en effet cette force est, comme on sait, constamment perpendiculaire à la vitesse relative V_r ; elle est par suite constamment perpendiculaire au déplacement élémentaire relatif $\vec{V_r} \times dt$. On a donc le théorème :

La variation de l'énergie cinétique relative d'un point matériel est égale à la somme des travaux des forces données, des forces de liaison et de la force d'inertie d'entraînement, ces travaux étant évalués dans le déplacement relatif.

Lorsque l'on étudie le mouvement relatif d'un point matériel assujetti à rester sur une courbe (ou sur une surface) invariable fixée dans le système entraîné S et s'il n'y a pas frottement, la force de liaison est à chaque instant normale à la courbe (ou à la surface), tandis que le déplacement élémentaire relatif s'effectue suivant la tangente à la courbe (ou dans le plan tangent à la surface) ; dans ces conditions le travail de la force de liaison est nul dans le mouvement relatif, ce qui simplifie encore l'application du théorème des forces vives.

71. Cas de l'équilibre relatif. — Lorsqu'un point matériel est en repos relatif, son accélération relative J_r est nulle ; de plus son accélération de Coriolis J_c est également nulle, puisque la vitesse relative V_r est nulle ; l'égalité (2) se réduit à

$$\vec{F} + (-m\vec{J_e}) = 0. \tag{3}$$

Le système des forces données et de liaison et de la force d'inertie d'entraînement est donc équivalent à zéro et par suite admet une résultante nulle.

Le cas le plus fréquent est celui où le système entraîné S est animé d'un mouvement de rotation autour d'une droite du système fixe S_1. On peut alors supposer que les axes Oz et Oz_1 sont confondus avec l'axe de rotation. Le mouvement d'entraînement est circulaire et si le point A est à une distance r de l'axe de rotation, les composantes tangentielle et normale centripète de l'accélé-

ration d'entraînement $\vec{J_e}$ sont respectivement $r\frac{d\omega}{dt}$ et $\omega^2 r$; la composante tangentielle de la force d'inertie d'entraînement $-m\vec{J_e}$ est donc $-mr\frac{d\omega}{dt}$, tandis que sa composante normale centrifuge est $+m\omega^2 r$. Cette dernière composante joue un rôle important et on lui donne le nom de force centrifuge; si la vitesse angulaire ω est constante, la force d'inertie d'entraînement se confond avec la force centrifuge.

Exemple. — Supposons qu'une ligne plane ou gauche, de forme invariable, tourne autour d'un axe vertical O_1z_1 avec une vitesse angulaire constante ω. Cherchons les positions d'équilibre relatif d'un point matériel pesant A assujetti à se déplacer sans frottement sur cette ligne.

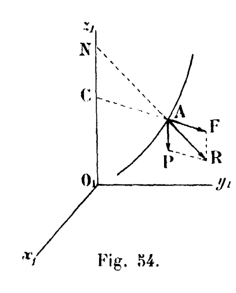


Fig. 54.

Soient A une position d'équilibre, C la projection de A sur l'axe de rotation (*fig.* 54). Nous aurons $CA = r$. Le poids $P = mg$ et la force centrifuge, portée par CA, d'intensité $F = m\omega^2 r$, doivent avoir leur résultante R normale à la courbe. Mais les deux forces P et F sont situées dans le plan passant par l'axe de rotation et par le point A; leur résultante R rencontre donc l'axe de rotation en un point N, qui doit être le point d'intersection de l'axe de rotation avec le plan normal à la courbe en A. Les triangles semblables ACN et AFR fournissent la relation

$$\frac{CN}{CA} = \frac{FR}{AF}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{CN}{r} = \frac{mg}{m\omega^2 r}, \qquad CN = \frac{g}{\omega^2}.$$

La longueur CN que l'on peut appeler « sous-normale comptée sur l'axe de rotation » doit donc être égale à $\frac{g}{\omega^2}$. Si la courbe est une parabole d'axe O_1z_1, de concavité tournée vers le haut, la sous-normale est égale au paramètre ; on voit que le point matériel est en équilibre indifférent en un point quelconque de la parabole si $\frac{g}{\omega^2}$ est égal au paramètre et n'est jamais en équilibre si $\frac{g}{\omega^2}$ est différent du paramètre.

72. Cas du mouvement relatif. — Lorsque le point matériel est libre, les projections de l'égalité géométrique (2) sur les axes $Oxyz$ fournissent des équations qui permettent l'étude du mouvement ; lorsque le point matériel est soumis à une liaison, il est avantageux d'utiliser des combinaisons qui élimi-

nent les forces de liaison. Nous avons déjà remarqué que s'il n'y a pas frottement, le théorème des forces vives ne fait pas intervenir la force de liaison.

Dans le cas particulier où le mouvement d'entraînement est une rotation autour de l'axe O_1z_1 ou Oz avec une vitesse angulaire ω variable, les composantes de $\vec{\Phi} = -m\vec{J}_c$ sur le rayon Or et sur la perpendiculaire Op (*fig.* 55) sont $\Phi_r = m\omega^2 r$ et $\Phi_p = -mr\frac{d\omega}{dt}$; les projections de Φ_r, Φ_p et $-mJ_c$ sur les axes $Oxyz$ sont fournies par le tableau :

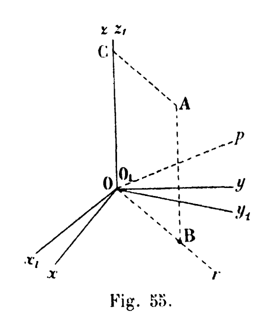


Fig. 55.

	Φ_r	Φ_p	$-mJ_c$
Ox	$m\omega^2 x$	$my\frac{d\omega}{dt}$	$2m\omega\frac{dy}{dt}$
Oy	$m\omega^2 y$	$-mx\frac{d\omega}{dt}$	$-2m\omega\frac{dx}{dt}$
Oz	0	0	0

(Voir l'exemple du n° 35.)

Si X, Y, Z sont les projections sur les axes O_1xyz de la résultante des forces données, si X′, Y′, Z′ sont les projections sur les mêmes axes de la force de liaison, au cas où elle existe, les équations du mouvement déduites de (2) sont

$$(4)\quad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = X + X' + m\omega^2 x + my\dfrac{d\omega}{dt} + 2m\omega\dfrac{dy}{dt}, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = Y + Y' + m\omega^2 y + mx\dfrac{d\omega}{dt} - 2m\omega\dfrac{dx}{dt}, \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = Z + Z'. \end{cases}$$

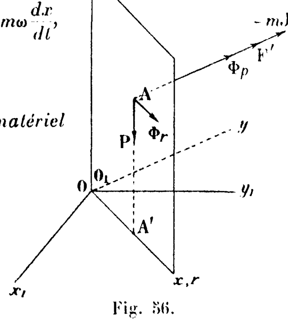


Fig. 56.

Exemple. — *Mouvement d'un point matériel pesant assujetti à se déplacer sans frottement dans un plan vertical tournant autour d'une de ses droites supposée verticale.*

Prenons cette droite comme axes O_1z_1 et Oz et prenons l'axe Ox dans le plan mobile (*fig.* 56). Le point matériel est soumis dans le mouvement relatif au poids $\vec{AP}$ $(0, 0, -mg)$, aux forces Φ_r, Φ_p, $-mJ_c$ et à la force de liaison F′. Comme y est nul et comme les forces Φ_p, $-mJ_c$, F′ sont perpendiculaires au plan, les

équations du mouvement (4) se réduisent à

$$\left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= m\omega^2 x,\\ 0 &= \mathrm{Y}' - mx\frac{d\omega}{dt} - 2m\omega\frac{dx}{dt},\\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= -mg. \end{aligned}\right.$$

La troisième équation montre que le déplacement de la projection verticale du mobile est le même que celui d'un point matériel pesant en chute libre dans le vide. La première équation a pour solution générale

$$x = \mathrm{C}_1 e^{\omega t} + \mathrm{C}_2 e^{-\omega t}.$$

La deuxième équation fournit l'intensité Y' de la force de liaison.

73. Equilibre et mouvement relatifs d'un point matériel à la surface de la Terre. — Considérons un point matériel A en mouvement au voisinage de la surface de la Terre. Par le centre O_1 de la Terre menons des axes $\mathrm{O}_1x_1y_1z_1$ parallèles à un trièdre de Galilée (n° 37). Nous allons étudier le mouvement relatif du point A par rapport au trièdre $\mathrm{O}_1x_1y_1z_1$ qui est animé d'un mouvement de translation (*fig.* 57).

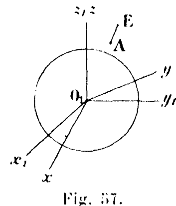


Fig. 57.

Nous verrons plus loin (n° 84) que le point O_1 se meut comme un point matériel ayant pour masse concentrée la masse totale M de la Terre et soumis à la somme géométrique des attractions du Soleil et des autres corps célestes sur les différentes parties de la Terre. On démontre d'ailleurs dans la théorie de l'attraction universelle et nous admettrons que la somme géométrique des attractions considérées est égale à la résultante des forces d'attraction qui s'exerceraient sur un point matériel O_1 de masse M. Désignons par $\vec{\mathrm{J}}$ la résultante des forces d'attraction qui s'exerceraient sur un point matériel O_1 de masse unité. Puisque les forces d'attraction sont proportionnelles aux masses, la résultante des forces d'attraction qui s'exerceraient sur un point matériel O_1 de masse M serait $\mathrm{M}.\vec{\mathrm{J}}$. D'après l'égalité géométrique fondamentale de la dynamique, appliquée au point O_1, de masse M, soumis à la force $\mathrm{M}.\vec{\mathrm{J}}$, le vecteur $\vec{\mathrm{J}}$ est égal à l'accélération du point O_1.

Occupons-nous du point matériel A de masse m. Il est soumis de la part du Soleil et des autres corps célestes à des forces d'attraction dont la résultante a sensiblement la valeur qu'elle aurait si le point A occupait la position O_1 (en effet les distances CA et CO_1 d'un point C d'un corps céleste aux points A et O_1 diffèrent entre elles d'une quantité qui est très petite vis-à-vis d'elles-

mêmes) ; cette résultante a donc pour valeur approximative $m \cdot \vec{J}$. Désignons par $\vec{F_a}$ la résultante des forces d'attraction dues aux différentes parties de la Terre et par $\vec{F}$ la résultante des forces appliquées au point A sans être des forces d'attraction de corps célestes ou terrestres.

Appliquons au mouvement du point A par rapport au trièdre $O_1x_1y_1z_1$ l'équation générale (2), en remarquant que la force de Coriolis est nulle, puisque le trièdre mobile $O_1x_1y_1z_1$ est animé d'une translation. Nous aurons

$$m \cdot \vec{J_r} = \vec{F_a} + \vec{F} + m\vec{J} + (-m\vec{J_e}).$$

Mais $\vec{J_e}$ est égal à J, puisque J est l'accélération du point O_1, c'est-à-dire l'accélération d'entraînement du point A, car dans un mouvement de translation tous les points ont à chaque instant des accélérations équipollentes. Nous aurons donc tout simplement

$$m\vec{J_r} = \vec{F_a} + \vec{F}.$$

Tout se passe donc comme si la Terre était seule avec un centre immobile. Remarquons d'ailleurs en passant que l'accélération J du centre de la Terre a une valeur assez faible vis-à-vis de l'accélération g de la chute des corps ; cette accélération J est en effet sensiblement égale à celle d'un point décrivant autour du soleil un cercle de rayon $r = 1{,}48 \times 10^{13}$ cm, en une année sidérale qui vaut 365,2568 jours solaires moyens ; on a donc sensiblement $J = \omega^2 r$, avec $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1{,}99 \times 10^{-7} \frac{\text{radian}}{\text{sec}}$; par suite, $J = 0{,}558 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$.

Considérons maintenant un point matériel en repos à la surface de la Terre. Envisageons le trièdre $O_1x_1y_1z_1$ dont nous supposerons désormais l'axe O_1z_1 en coïncidence avec la ligne des pôles, ce qui est possible car cette ligne reste sensiblement parallèle à elle-même en passant constamment par l'étoile polaire, très éloignée. — Imaginons un autre trièdre $Oxyz$ lié à la Terre ayant même origine que le premier trièdre et son axe Oz en coïncidence avec l'axe O_1z_1. Supposons que le point matériel est placé à l'extrémité d'un fil, comme dans le cas d'un fil à plomb. D'après l'équation (3) le système des forces données et de liaison et de la force d'inertie d'entraînement est équivalent à zéro. Comme forces données on a seulement la force $\vec{F_a}$ d'attraction de la Terre sur le point A, puisque nous pouvons raisonner comme si la Terre était seule et si O_1 était fixe. La force de liaison F' est égale et opposée à la force que le fil exerce sur son point d'attache E. La force d'inertie d'entraînement se réduit à la force centrifuge $m\omega^2 r$, où r est le rayon du parallèle tracé sur la surface de la Terre et passant par le point A ; on a d'ailleurs $r = R \cos \lambda$, si R est le rayon de la Terre supposée sphérique et si λ est la latitude du point A. Nous arrivons à ce résultat que la force d'attraction F, la force centrifuge $m\omega^2 R \cos \lambda$ et la force de liaison F' sont en équilibre.

Par définition le poids du point A est la force exercée par le fil sur son point d'attache E. Nous voyons que *ce poids est égal à la résultante de la force d'attraction* F_a *et de la force centrifuge* ; la direction du poids, qui est celle du fil, définit la verticale du point A ; cette direction ne passe par le centre de la Terre qu'aux pôles et à l'équateur.

La force centrifuge est égale à $m\omega^2 R \cos \lambda$ avec $\omega = 7{,}3 \times 10^{-5}$ radians par seconde (un tour par jour sidéral de 86 164 secondes) et

$$R = 6\,366 \times 10^5 \text{ cm} ;$$

son intensité est donc $3{,}38 \cos \lambda \dfrac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$; sauf au voisinage des pôles, cette force centrifuge n'est pas négligeable vis-à-vis du poids.

Pour étudier le repos relatif ou le mouvement relatif d'un point matériel près de la surface de la Terre, envisageons le mouvement relatif par rapport au trièdre $Oxyz$ lié à la Terre, en raisonnant comme si le trièdre $O_1x_1y_1z_1$ était fixe et si la Terre était seule. Nous obtenons l'égalité

$$m\vec{J_r} = \vec{F} + \vec{F_a} + (-m\vec{J_e}) + (-\vec{J_c}),$$

où $-mJ_e$ est maintenant la force d'inertie d'entraînement due à la rotation du repère $Oxyz$; cette force n'est autre que la force centrifuge ; l'ensemble des deux forces F_a et $(-mJ_e)$ admet ainsi pour résultante le poids mg, d'après la définition du poids. Il suffit donc d'ajouter aux forces données autres que la pesanteur et la force de liaison, si elle existe, le poids mg et la force de Coriolis $(-mJ_c)$:

$$mJ_r = \vec{F} + m\vec{g} + (-m\vec{J_c}).$$

D'ailleurs la force de Coriolis est très faible ; on ne l'envisage que dans des problèmes spéciaux comme ceux du pendule de Foucault et du tir à longue portée ; cette force de Coriolis est rigoureusement nulle si le point matériel est en équilibre relatif.

Ce qui précède se résume en disant que les problèmes usuels de la mécanique terrestre se traitent comme si un trièdre lié à la Terre était un trièdre de Galilée, à condition de remplacer l'attraction de la Terre par le poids mg et de ne pas tenir compte de l'attraction des corps célestes.

Pour un problème de mouvement relatif, on écrira simplement (en négligeant la force de Coriolis)

$$m\vec{J_r} = \vec{F} + m\vec{g}.$$

Pour un problème d'équilibre relatif, on écrira simplement

$$\vec{F} + m\vec{g} = 0.$$

CHAPITRE XI

CENTRES DE MASSE. MOMENTS D'INERTIE

---

74. Centre de masse et centre de gravité d'un système matériel. — Considérons un système de n points matériels A_1, A_2, ..., A_n dont les masses sont m_1, m_2, ... m_n, et dont les coordonnées sont x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 ; ..... ; x_n, y_n, z_n. La masse totale du système est $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$. Par définition, le centre de masse du système matériel est le point dont les coordonnées ξ, η, ζ sont définies par les équations

$$(1)\quad \begin{cases} M\xi = m_1x_1 + m_1x_2 + \cdots + m_nx_n = \Sigma m_kx_k, \\ M\eta = m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_ny_n = \Sigma m_ky_k, \\ M\zeta = m_1z_1 + m_2z_2 + \cdots + m_nz_n = \Sigma m_kz_k. \end{cases}$$

Le centre de masse coïncide donc avec le centre d'un système de vecteurs parallèles appliqués aux points A_1, A_2,... A_n et d'intensités proportionnelles à m_1, m_2, ... m_n. Il ne change pas de position si les masses varient dans un même rapport. Supposons que le système matériel soit situé à la surface de la Terre et ait une étendue suffisamment restreinte pour que l'on puisse considérer l'intensité g de la pesanteur comme constante en grandeur et direction. Le poids total sera Mg et les poids partiels seront m_1g, m_2g, ... m_ng. *Le point d'application du poids total s'appelle centre de gravité ;* celui-ci coïncide donc avec le centre de masse, puisque les vecteurs parallèles m_1g, m_2g, ..., m_ng sont proportionnels aux masses m_1, m_2, ... m_n. Cette coïncidence suppose que le système a une étendue suffisamment restreinte.

Si l'on déplace le système en le laissant invariable, c'est-à-dire en respectant les distances mutuelles, on peut imaginer que le système entraîne avec lui le trièdre de coordonnées ; les coordonnées des points restent alors fixes ; on voit ainsi que le centre de masse garde par rapport au système une position invariable.

Considérons un corps naturel solide ou fluide ; si on désigne par Δv la mesure d'un petit volume entourant un point géométrique A et par Δm la

masse de matière contenue dans le volume Δv, le rapport $\frac{\Delta m}{\Delta v}$ s'appelle densité moyenne du petit volume Δv. La limite du rapport $\frac{\Delta m}{\Delta v}$ quand les dimensions du volume Δv deviennent de plus en plus petites dans toutes les directions (de sorte que Δv tend vers zéro) s'appelle densité du corps au point A. On dit qu'un corps est homogène quand il a même densité ρ en ses différents points. Si un corps n'est pas homogène la densité ρ est une fonction $\rho\ (x, y, z)$ des coordonnées du point A. La masse Δm du petit volume Δv est un infiniment petit dont la partie principale est $\rho . \Delta v$. La masse totale est la somme des masses des volumes partiels dans lesquels on peut décomposer le volume v. Si le corps est homogène la masse totale est manifestement ρv. Si le corps n'est pas homogène, la masse totale est la limite de la somme $\Sigma\rho\Delta v$. La valeur de cette masse totale est donc fournie par le calcul intégral sous la forme $M = \iiint \rho(x, y, z)dxdydz$. Mais nous pouvons remarquer que la masse totale peut se déterminer avec une balance, sans aucun calcul et sans connaître la densité en chaque point. C'est un fait général qu'une intégration dans un domaine naturel s'effectue plus aisément qu'une dérivation.

Pour trouver le centre de masse d'un corps, on imagine dans chaque élément de volume Δv un point matériel auquel on attribue la masse $\rho\Delta v$ de ce volume ; on cherche le centre de masse de ce système de points matériels par les formules (1) et l'on détermine la limite de ce centre de masse lorsque le nombre des éléments de volume augmente indéfiniment tandis que les éléments tendent vers zéro. C'est par le calcul intégral qu'on pourra déterminer cette limite sous la forme

$$M\xi = \iiint x . \rho(x, y, z)dxdydz,$$

$$M\eta = \iiint y . \rho(x, y, z)dxdydz,$$

$$M\zeta = \iiint z . \rho(x, y, z)dxdydz.$$

En principe, le calcul de M, ξ, η, ζ utilise des intégrales triples, mais dans la plupart des cas usuels, on peut se ramener à des intégrales doubles ou simples ou même à des calculs élémentaires, comme nous le montrerons sur des exemples

Il existe des corps ayant l'aspect de plaques de très faible épaisseur ; on peut envisager un tel corps comme une surface sur laquelle est étendue une couche de matière. Si Δm représente la masse de l'élément de surface Δs entourant le point A, le rapport $\frac{\Delta m}{\Delta s}$ s'appelle la densité superficielle moyenne

de l'élément. La limite de cette quantité lorsque Δs tend vers zéro s'appelle ***densité superficielle*** ρ au point A. La masse élémentaire de Δs a pour partie principale $\rho\Delta s$. Le calcul de la masse et des coordonnées du centre de masse de la surface conduit en principe à des intégrales de surfaces. Si la surface est plane, le centre de gravité est situé dans son plan [3e formule (1) avec axe des z perpendiculaire au plan].

De la même manière il existe des corps ayant l'aspect de fils de faibles dimensions transversales ; on peut envisager un tel corps comme une ligne continue douée de masse. Si Δs est un élément de longueur entourant un point A et si Δm est la masse de cet élément, la limite du rapport $\frac{\Delta m}{\Delta s}$ s'appelle *densité linéaire* au point A. Le calcul de la masse et des coordonnées du centre de masse de la ligne conduit en principe à des intégrales curvilignes. Si une ligne est plane, le centre de gravité est situé dans son plan (pour le démontrer on adopte Oz perpendiculaire au plan).

75. Théorèmes généraux. — Théorème I. — *Pour chercher le centre de masse d'un corps, on peut supprimer une portion de ce corps en la remplaçant par un point matériel ayant pour masse celle de la portion et pour position celle du centre de gravité de la portion supprimée.*

Ce théorème résulte immédiatement des formules (1) et de cette remarque que dans une somme on peut remplacer plusieurs termes par leur somme.

Ce théorème est utile quand on peut décomposer le corps en plusieurs parties V_1, V_2, ... V_p de masses m_1, m_2, ... m_p et de centres de masse C_1, C_2, ... C_p. Le centre de masse C du corps coïncide avec le centre de masse du système formé par les points C_1, C_2, ... C_p affectés de masses m_1, m_2, ... m_p.

On utilise aussi ce théorème pour chercher le centre de masse d'un corps homogène H présentant une cavité. On imagine un corps auxiliaire H′ de même matière homogène que H et l'on écrit que le centre de gravité du corps H″ qui est constitué par l'ensemble de H et H′ coïncide avec le centre de masse de deux points matériels C et C′ coïncidant avec les centres de gravité des corps H et H′ et ayant pour masses celles M et M′ des corps H et H′. On a donc par exemple

$$(M + M')\xi'' = M\xi + M'\xi'.$$

Il est facile de généraliser au cas d'un corps présentant plusieurs cavités.

Théorème II. — *Si un corps matériel admet un plan diamétral, ce plan contient le centre de masse.*

On dit qu'un corps matériel admet un plan diamétral Π relativement à une direction Δ si à chaque point matériel A du corps on peut faire corres-

pondre un point matériel A′ de même masse de telle sorte que le segment AA′ soit parallèle à la direction Δ et ait son milieu J dans le plan Π.

Il est manifeste que le centre de gravité du corps est situé dans un plan diamétral. En effet on peut, en vertu du théorème I, remplacer chaque couple de points A, A′ par un point matériel placé au milieu J. On est donc amené à chercher le centre de gravité de points I qui sont tous situés dans le plan Π. En adoptant pour un instant l'axe des x normal au plan Π et l'origine dans le plan Π, on voit alors sur la troisième formule (1) que ζ est nul.

Si la direction Δ est perpendiculaire au plan Π on dit que le plan diamétral Π est un plan de symétrie matérielle.

Si le corps matériel est homogène il suffit, pour qu'il admette un plan diamétral Π relativement à une direction Δ, qu'à chaque point géométrique A corresponde un point géométrique A′ tel que le segment AA′ soit parallèle à la direction Δ et ait son milieu dans le plan Π. Il est facile de décomposer le corps matériel en parallélépipèdes élémentaires dont les centres se correspondent et qui ont même volume et par suite même masse. En remplaçant ces parallélépipèdes par des points matériels placés aux centres, on est ramené au cas général, car deux points matériels correspondants ont même masse.

Si un corps matériel admet deux plans diamétraux, son centre de masse est situé sur la droite d'intersection de ces deux plans et si un corps matériel admet trois plans diamétraux, son centre de gravité est situé au point commun aux trois plans.

Théorème III. — *Si un corps matériel admet un diamètre, celui-ci contient le centre de masse.*

On dit qu'un corps matériel admet une droite Δ pour diamètre relativement à une direction de plan Π, si à chaque point matériel A du corps on peut faire correspondre un point matériel A′ de même masse tel que le segment AA′ soit parallèle au plan Π et partagé en deux parties égales par le diamètre. Le théorème se démontre aisément comme le théorème II.

Si le corps matériel est homogéne, il admet un diamètre Δ relativement à une direction de plan Π si à chaque point géométrique A du corps on peut faire correspondre un point géométrique A′ tel que le segment AA′ soit parallèle au plan Π et partagé en deux parties égales par le diamètre.

Théorème IV. — *Si un corps matériel admet un centre de symétrie, celui-ci coïncide avec le centre de masse.*

On dit qu'un corps matériel admet un centre de symétrie O si à chaque point matériel A du corps on peut faire correspondre un point matériel A′ de même masse tel que le milieu du segment AA′ coïncide avec le point O. En vertu du théorème I on peut remplacer les couples de points A, A′ par des

points matériels coïncidant avec le point O ; le centre de masse coïncide donc avec le point O.

Remarque. — Les théorèmes qui précèdent sont surtout utiles pour chercher le centre de masse de certains corps homogènes de formes géométriques simples.

76. Centres de masse des lignes. — Le centre de masse d'un segment de droite homogène coïncide avec le milieu, qui est un centre de symétrie. L'application du théorème I permet de trouver aisément le centre de gravité d'une ligne polygonale homogène.

Le centre de masse d'une ligne plane polygonale régulière homogène coïncide avec le centre du cercle dans lequel est inscrite la ligne. Menons en effet par un sommet de la ligne polygonale le diamètre du cercle ; le plan perpendiculaire au plan de la ligne et passant par le diamètre est manifestement un plan de symétrie. Le centre de gravité doit donc se trouver dans les plans de symétrie passant par les différents sommets ; il est donc situé sur leur droite commune qui passe par le centre du cercle ; comme le centre de gravité est situé dans le plan de la ligne polygonale, il coïncide avec le centre du cercle.

Le centre de masse des lignes se calcule généralement par des intégrales curvilignes.

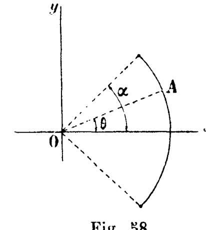


Fig. 58.

Exemple. — *Centre de masse d'un arc de cercle homogène.* — Adoptons un trièdre trirectangle ayant son centre O au centre du cercle et son axe Ox en coïncidence avec l'axe de symétrie de l'arc de cercle (*fig.* 58). Le centre de masse est situé dans le plan zOx qui est un plan de symétrie ; il est d'ailleurs situé dans le plan xOy qui est le plan de la ligne ; il se trouve donc sur la droite Ox. Il suffit de chercher l'abscisse du centre de masse.

Désignons par ρ la densité linéaire. Nous aurons

$$M\xi = \int \rho x ds, \qquad M = 2\rho R\alpha.$$

Mais
$$x = R\cos\theta, \qquad ds = Rd\theta, \qquad -\alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha.$$

D'où
$$2\rho R\alpha\xi = \iint_{-\alpha}^{+\alpha} \rho R^2 \cos\theta d\theta\, ; \qquad \xi = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Premier théorème de Guldin. — *L'aire engendrée par une ligne plane tournant autour d'un axe ne la traversant pas et situé dans son plan est*

égale au produit de la longueur de la ligne par la longueur de la circonférence décrite par le centre de masse de cette ligne supposée homogène.

Adoptons l'axe de rotation pour axe Ox et la perpendiculaire dans le plan de la ligne pour axe Oy. On sait que l'aire engendrée par la ligne plane tournant autour de Ox a pour valeur $\int 2\pi y ds$, c'est-à-dire $2\pi \int y ds$. Mais on a, d'après la 2e formule (1), en désignant par l la longueur de la ligne,

$$\rho l\eta = \int \rho y ds, \qquad l\eta = \int y ds.$$

La valeur de l'aire engendrée est donc $2\pi\eta l$, conformément au théorème.

Ce théorème permettrait par exemple de trouver le centre de gravité d'un arc de cercle homogène en faisant tourner cet arc autour de l'axe Oy (*fig.* 58) de façon à lui faire engendrer une zone.

77. Centre de masse des surfaces. — Le centre de masse d'un parallélogramme homogène, d'un cercle homogène, d'une couronne circulaire homogène, est situé au centre de symétrie. On voit aisément que le centre de gravité d'une aire homogène plane limitée par un polygone régulier est situé au centre du cercle circonscrit, car il passe par chaque sommet un plan de symétrie contenant le centre du cercle.

En remarquant que, pour un triangle homogène, un plan perpendiculaire au plan du triangle et passant par une médiane est un plan diamétral relativement à la direction du côté traversé par la médiane, on voit que le centre de masse doit être situé au point de concours des médianes et se confond avec le centre de masse de trois masses égales situées aux trois sommets.

Pour obtenir le centre de masse d'une aire plane homogène limitée par une ligne polygonale, on décompose cette aire en triangles et on applique le théorème I. Donnons comme exemple la recherche du centre de gravité d'un trapèze que l'on décompose en deux triangles ; cette recherche se simplifie d'ailleurs par cette remarque que le centre de masse est situé sur la droite qui joint les milieux des deux bases (car le plan mené par cette droite perpendiculairement au plan du trapèze est un plan diamétral pour la direction des bases).

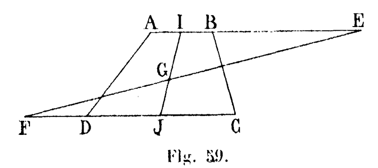


Fig. 59.

Rappelons que dans les cours élémentaires de Mécanique on démontre que le centre de gravité G d'un trapèze ABCD (*fig.* 59) est situé sur la droite qui joint les points E et F obtenus en prolongeant chacune des bases d'un segment égal à

l'autre base, ces prolongements étant effectués en sens inverses : BE = DC et DF = AB. On obtient donc le centre de gravité en cherchant l'intersection de la droite EF avec la droite IJ qui joint les milieux des deux bases.

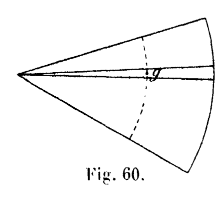


Fig. 60.

En décomposant un secteur en secteurs élémentaires (*fig.* 60) assimilables à des triangles on voit que le centre de gravité d'un secteur homogène de rayon R coïncide avec le centre de gravité d'un arc homogène découpé par le secteur dans le cercle de rayon $\frac{2R}{3}$.

Second théorème de Guldin. — *Le volume engendré par une aire plane tournant autour d'un axe ne traversant pas l'aire et situé dans son plan est égal au produit de la mesure de cette aire par la circonférence engendrée par le centre de masse de cette aire supposée homogène.*

En effet, adoptons l'axe de rotation pour axe Ox. Le volume engendré par la rotation de l'aire sera $\iint 2\pi y dx dy$. Mais on a $\rho S\eta = \iint \rho y dx dy$, si S représente la mesure de l'aire et ρ sa densité superficielle ; on a donc $S\eta = \iint y dx dy$ et par suite le volume engendré a pour valeur $S \times 2\pi\eta$.

78. Centre de masse des volumes. — Le centre de masse d'un parallélépipède homogène ou d'une sphère homogène coïncide avec le centre géométrique, qui est un centre de symétrie.

Cherchons le centre de masse d'un tétraèdre homogène ABCD (*fig.* 61 *a*). Le plan ABI passant par l'arête AB et par le milieu I de l'arête CD est un plan diamétral. De même le plan ADJ passant par l'arête AD et par le milieu J de l'arête BC est un plan diamétral. Le centre de masse du tétraèdre se trouve donc situé sur la droite AG_1 d'intersection des deux plans diamétraux considérés. Mais le point G_1 est au centre de gravité du triangle BCD puisqu'il est situé sur les médianes BI et DJ. Le centre de masse est donc sur chacune des quatre droites qui joignent un sommet au centre de

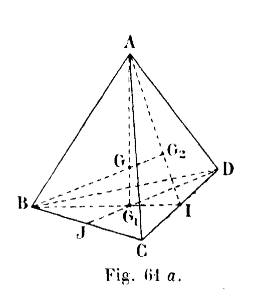


Fig. 61 *a*.

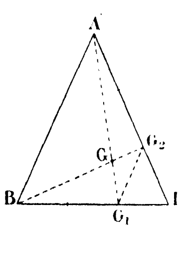


Fig. 61 *b*.

masse de la face opposée supposée homogène. Soit G_2 le centre de masse du triangle ACD, situé sur la droite AI. Le centre de gravité du tétraèdre se trouve à l'intersection des deux droites AG_1 et BG_2 situées dans le plan ABI. Mais on voit aisément (*fig.* 61 *b*) que les deux droites BG_2 et AG_1 se rencontrent en un point G situé en leur quart ; en effet G_1 est au tiers de BI, G_2 est au tiers de AI ; donc G_1G_2 est parallèle à AB et la longueur de G_1G_2 est le tiers de la longueur de AB ; les deux triangles ABG et GG_1G_2 sont donc semblables avec rapport de similitude 3 ; par suite on a $BG = 3GG_1$ et $AG = 3GG_1$. Nous sommes ainsi conduits à dire que *le centre de masse d'un tétraèdre est situé sur le segment qui joint un sommet au centre de masse de la face opposée, au quart de ce segment à partir de la base.*

Remarquons que, si l'on cherche le centre de masse de quatre masses égales affectées aux sommets d'un tétraèdre, on trouve le centre de masse du tétraèdre ; il suffit, pour le voir, de commencer par remplacer trois des masses par une masse triple affectée à leur centre de masse.

Considérons un prisme homogène. Décomposons l'une des deux bases égales en surfaces élémentaires et le prisme en prismes élémentaires, ayant pour bases ces surfaces élémentaires. Nous pouvons (théorème I) remplacer chaque prisme élémentaire, assimilable à une tige, par un point matériel ayant même masse et placé au milieu. Nous sommes donc ramenés à chercher le centre de masse de masses situées toutes dans le plan équidistant des deux bases, chaque masse étant proportionnelle au volume et par suite à la surface de base du prisme élémentaire correspondant. On en déduit immédiatement que le centre de gravité du prisme coïncide avec celui de la section moyenne supposée homogène. Donc, *le centre de masse d'un prisme homogène coïncide avec le centre de masse de la section par un plan équidistant des deux bases.* D'ailleurs, en considérant un cylindre comme la limite d'un prisme, on voit que la règle des prismes s'applique aux cylindres.

Considérons un corps homogène de révolution autour de Oz ; soit $r = f(z)$ l'équation de la méridienne ; supposons que la densité ρ ne dépende que de z. Décomposons le corps en tranches perpendiculaires à l'axe et d'épaisseur dz. Chaque tranche a une masse $\pi r^2 \rho dz$. On a donc

$$M = \int \pi r^2 \rho dz \quad \text{et} \quad M\zeta = \int \pi r^2 \rho z dz.$$

79. Moments et produits d'inertie. — Etant donné un système de points matériels $A_1, A_2, \ldots A_n$ de masses $m_1, m_2, \ldots m_n$, on appelle moment d'inertie de ce système par rapport à un point, une droite ou un plan la somme des produits des masses par les carrés des distances au point, à la droite ou au plan. Si r_k représente la distance du point A_k, le moment d'inertie est donné par la

formule $\Sigma m_k r_k^2$. En dynamique on n'utilise guère que le moment d'inertie par rapport à une droite ; on le représente par I ; on a l'habitude de poser $I = Mk^2$, M désignant la masse totale ; k est homogène à une longueur et s'appelle rayon de gyration du système. On appelle moment d'inertie par rapport à un axe, le moment d'inertie par rapport à la droite qui porte cet axe.

Les trois espèces de moments d'inertie se rattachent les unes aux autres d'une manière simple. Si nous rapportons le système à trois axes rectangulaires, les moments par rapport aux plans de coordonnées sont $\Sigma m_k x_k^2$, $\Sigma m_k y_k^2$, $\Sigma m_k z_k^2$, les moments par rapport aux axes de coordonnées sont $\Sigma m_k(y_k^2 + z_k^2)$, $\Sigma m_k(z_k^2 + x_k^2)$, $\Sigma m_k(x_k^2 + y_k^2)$, le moment par rapport à l'origine est égal à $\Sigma m_k(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)$. On voit que le moment par rapport à un axe est égal à la somme des moments par rapport à deux plans rectangulaires passant par cet axe et que le moment par rapport à un point est égal à la somme des moments par rapport à trois plans perpendiculaires deux à deux passant par le point.

A côté des moments d'inertie, on envisage les produits d'inertie $\Sigma m_k y_k z_k$, $\Sigma m_k z_k x_k$, $\Sigma m_k x_k y_k$. Ces produits d'inertie ne sont définis que si l'on a choisi des axes de coordonnées ; leur valeur dépend du choix des axes. Ils ont un signe quelconque, tandis que les moments d'inertie sont positifs.

Si l'on a un corps remplissant un certain volume, on le décompose en éléments de volume Δv ; on évalue les masses Δm de ces éléments et on calcule la distance r du centre de chaque élément au point, au plan ou à la droite. On cherche enfin la limite de la somme $\Sigma r^2 \Delta m$ pour obtenir le moment d'inertie. On peut d'ailleurs remplacer cette limite par celle de $\Sigma \rho r^2 \Delta v$ puisque Δm a pour partie principale $\rho \Delta v$. Dans le cas général un moment d'inertie est fourni par une intégrale triple. Mais souvent on peut le calculer par une intégrale double ou simple, comme cela arrive pour une plaque ou une ligne.

80. Calcul des moments d'inertie. — Nous allons donner quelques exemples de calcul de moments d'inertie.

Barre rectiligne homogène. — Cherchons le moment d'inertie par rapport à un axe passant par son centre O et perpendiculaire à la barre. Désignons par ρ la densité linéaire, par l la longueur de la barre. Un élément de longueur ds, d'abscisse s, a une masse ρds et un moment d'inertie $\rho s^2 ds$. Le moment d'inertie de la barre est donc

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \rho s^2 ds = \left[\rho \frac{s^3}{3}\right]_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} = \frac{\rho l^3}{12} = \frac{Ml^2}{12}.$$

On a donc
$$k^2 = \frac{l^2}{12}.$$

Cylindre circulaire homogène. — Cherchons le moment d'inertie par rapport à l'axe. Décomposons le cylindre de hauteur h en tubes élémentaires d'épaisseur dr et de rayon moyen r. Le volume d'un tube élémentaire est $2\pi rhdr$. Le moment d'inertie d'un tube est $2\pi rhdr \times \rho \times r^2$, car les différents éléments du tube sont à la même distance r de l'axe. Le moment d'inertie du cylindre a donc pour valeur

$$I = \int_0^R 2\pi r^3 h\rho dr = 2\pi h\rho \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4}{2} h\rho.$$

Mais on a $M = \pi R^2 h\rho$. Donc $k^2 = \frac{I}{M} = \frac{R^2}{2}$.

Volume de révolution homogène. Cône. — Décomposons le volume en tranches élémentaires perpendiculaires à l'axe de révolution Oz. Soit $R = R(z)$ le rayon de la tranche de cote z. La tranche, d'épaisseur dz, est assimilable à un cylindre et a par suite pour moment d'inertie $\frac{\pi R^4}{2} \rho dz$. Le moment d'inertie du volume total est donc

$$I = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\pi R^4}{2} \rho dz.$$

Le moment d'inertie est ainsi fourni par une intégrale simple.

Soit par exemple un cône homogène de hauteur h et de rayon de base R_0. On a ici $R = \frac{R_0 z}{h}$, en prenant l'origine O au sommet du cône. On en déduit immédiatement $I = \frac{3}{10} MR_0^2$.

Sphère homogène. — Cherchons d'abord le moment d'inertie par rapport au centre. Décomposons pour cela la sphère en couches concentriques dont le volume est compris entre les deux sphères voisines de rayons r et $r + dr$. La masse d'une couche est $4\pi r^2 \times \rho dr$ et son moment d'inertie est $4\pi r^2 \times \rho \times r^2 dr$. Le moment d'inertie de la sphère par rapport à son centre est donc égal à $\int_0^R 4\pi r^4 \rho dr = \frac{4}{5} \pi\rho R^5$. Le moment d'inertie par rapport à un plan passant par le centre est le tiers du moment d'inertie par rapport au centre, car ce dernier moment d'inertie est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à trois plans passant par le centre et rectangulaires deux à deux. Le moment d'inertie par rapport à un plan passant par le centre est donc égal à $\frac{4}{15} \pi\rho R^5$. Le moment d'inertie par rapport à un diamètre est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à deux plans rectangulaires passant par le diamètre ; il a donc pour valeur le double du moment d'inertie par rapport à

un plan passant par le centre, c'est-à-dire $I = \frac{8}{15}\pi\rho R^5$. D'ailleurs on a

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3, \qquad \text{d'où} \qquad I = \frac{2}{5} MR^2, \qquad k^2 = \frac{2}{5} R^2.$$

81. Variations du moment d'inertie par rapport à un axe se déplaçant parallèlement à sa direction. — *Le moment d'inertie par rapport à un axe est égal au moment d'inertie par rapport à un axe parallèle passant par le centre de masse augmenté du produit de la masse par le carré de la distance des deux axes.*

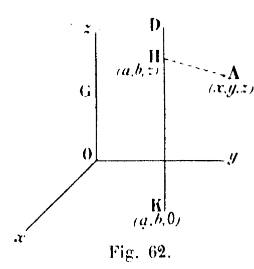


Fig. 62.

Prenons en effet pour axe Oz l'axe passant par le centre de masse ; désignons par a et b l'abscisse et l'ordonnée des points de l'axe D parallèle à Oz. Les moments d'inertie sont (*fig.* 62)

$$I_z = \Sigma m(x^2 + y^2), \qquad I_D = \Sigma m\,.\,\overline{AH}^2 = \Sigma m\left[(x-a)^2 + (y-b)^2\right],$$

ou $$I_D = \Sigma m(x^2 + y^2) + (a^2 + b^2)\Sigma m - 2a\Sigma mx - 2b\Sigma my.$$

D'ailleurs on a $a^2 + b^2 = d^2$, si d désigne la distance OK des deux axes, et les sommes Σmx et Σmy sont nulles, puisque les coordonnées ξ et η du centre de masse sont nulles. On voit donc que l'on a, en écrivant I_G pour désigner l'axe I_z passant par le point G,

$$I_D = I_G + Md^2.$$

82. Variations du moment d'inertie par rapport à un axe passant par un point. Ellipsoïde d'inertie. — Prenons le point par lequel passent les axes pour origine O. Désignons par α, β, γ les cosinus directeurs d'un axe D passant par O (*fig.* 63). La distance $r = AH$ d'un point A (x, y, z) à l'axe D est fournie par la géométrie analytique. On peut d'ailleurs remarquer que r est égal au moment par rapport au point A d'un vecteur de longueur unité porté par l'axe D ; les projections de ce moment sur les axes de coordonnées sont $\beta z - \gamma y$, $\gamma x - \alpha z$, $\alpha y - \beta x$; on a donc

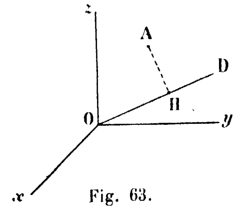


Fig. 63.

$$r^2 = (\beta z - \gamma y)^2 + (\gamma x - \alpha z)^2 + (\alpha y - \beta x)^2,$$

ou $$r^2 = \alpha^2(y^2 + z^2) + \beta^2(z^2 + x^2) + \gamma^2(x^2 + y^2) - 2\beta\gamma yz - 2\gamma\alpha zx - 2\alpha\beta xy.$$

Le moment d'inertie par rapport à l'axe D a pour valeur

$$I = \Sigma mr^2 = \alpha^2\Sigma m(y^2 + z^2) + \beta^2\Sigma m(z^2 + x^2) + \gamma^2\Sigma m(x^2 + y^2) \\ - 2\beta\gamma\Sigma myz - 2\gamma\alpha\Sigma mzx - 2\alpha\beta\Sigma mxy.$$

Désignons, pour abréger, par A, B, C les moments d'inertie par rapport aux axes : $A = \Sigma m(y^2 + z^2)$, $B = \Sigma m(z^2 + x^2)$, $C = \Sigma m(x^2 + y^2)$, et par D, E, F les trois produits d'inertie : $D = \Sigma myz$, $E = \Sigma mzx$, $F = \Sigma mxy$. Nous aurons

$$I = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta.$$

Cette formule nous donne la variation du moment d'inertie en fonction des cosinus directeurs de l'axe D. On vérifie que pour deux axes opposés portés par une même droite on a la même valeur du moment d'inertie.

On représente graphiquement la loi de variation du moment d'inertie en portant sur chaque axe D un vecteur $\overrightarrow{OP}$ de longueur $\frac{1}{\sqrt{I}}$. Le lieu de l'extrémité de ce vecteur est un ellipsoïde appelé ellipsoïde d'inertie, ayant pour centre l'origine. Les coordonnées du point P sont en effet $X = \frac{\alpha}{\sqrt{I}}$, $Y = \frac{\beta}{\sqrt{I}}$, $Z = \frac{\gamma}{\sqrt{I}}$. On a donc, en remplaçant α, β, γ par leurs valeurs $X\sqrt{I}$, $Y\sqrt{I}$ et $Z\sqrt{I}$ dans la formule qui donne I,

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EZX - 2FXY = 1.$$

Cette équation est celle du lieu du point P ; elle représente toujours un ellipsoïde, sauf dans le cas où tous les points du système matériel seraient situés sur une droite ; en effet le point P ne peut être rejeté à l'infini que sur une droite pour laquelle I est nul.

On appelle *axes principaux d'inertie* relatifs au point O les axes de l'ellipsoïde d'inertie. Ces axes sont en général au nombre de trois ; ils sont en nombre infini si l'ellipsoïde est de révolution ou est une sphère.

Pour que l'axe Oz soit un axe principal d'inertie, il faut que l'ellipsoïde soit symétrique par rapport à l'axe Oz. Cela exige que l'on ait

$$D = \Sigma mxz = 0, \qquad E = \Sigma myz = 0.$$

Pour que les trois axes de coordonnées soient des axes principaux d'inertie on doit avoir $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$, c'est-à-dire $\Sigma mxz = 0$, $\Sigma myz = 0$, $\Sigma mxy = 0$. Dans ce cas la formule qui donne la loi de variation du moment d'inertie se réduit à

$$I = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2.$$

L'équation de l'ellipsoïde d'inertie se réduit à

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1.$$

Un ellipsoïde quelconque ne peut pas être un ellipsoïde d'inertie. Soit en effet $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$ l'équation de l'ellipsoïde rapporté à ses axes. S'il est un ellipsoïde d'inertie, il existe un système matériel tel que l'on ait

$$\frac{1}{a^2}=A=\Sigma m(y^2+z^2), \qquad \frac{1}{b^2}=B=\Sigma m(z^2+x^2),$$
$$\frac{1}{c^2}=C=\Sigma m(x^2+y^2).$$

Mais on a $A+B-C=2\Sigma mz^2$; cela exige $A+B-C>0$ (à moins que l'on soit dans le cas d'une plaque $z=0$), c'est-à-dire $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}>0$; on a de même les deux inégalités obtenues par permutation circulaire ; on voit que les demi-axes de l'ellipsoïde doivent être tels que l'on puisse construire un triangle ayant pour mesures de ses côtés $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$ et $\frac{1}{c^2}$.

On appelle *ellipsoïde central d'inertie* l'ellipsoïde relatif au centre de masse G.

Théorème. — *Un axe de l'ellipsoïde central d'inertie est un axe principal d'inertie pour tous ses points.*

Supposons que l'axe Oz soit principal d'inertie pour le centre de masse G confondu avec l'origine O. Nous aurons $D=0$ et $E=0$, c'est-à-dire $\Sigma myz=0$, $\Sigma mxz=0$, nous aurons aussi $\zeta=0\eta=0$. Menons par un point O' de cote h situé sur l'axe Oz des axes $O'x'$, $O'y'$ parallèles aux axes Ox, Oy et un axe $O'z'$ confondu avec Oz. Nous aurons $D'=\Sigma my'z'=0$ et $E'=\Sigma mx'z'=0$; en effet, $x'=x$, $y'=y$, $z'=z-h$; donc

$$D'=\Sigma my(z-h)=\Sigma myz-h\Sigma my=D-hM\eta=0,$$
$$E'=\Sigma mx(z-h)=\Sigma mxz-h\Sigma mx=E-hM\xi=0.$$

On démontre aisément que *si un axe est principal d'inertie pour deux de ses points il l'est pour tous ses points et cet axe est un axe de l'ellipsoïde central d'inertie.*

La recherche des axes de l'ellipsoïde central d'inertie est souvent facilitée par des considérations de symétrie. Si une droite est un diamètre pour une direction de plan qui lui est perpendiculaire, cette droite est un axe de l'ellipsoïde central d'inertie. En effet, prenons la droite pour axe Oz ; à un point matériel de masse m et de coordonnées x, y, z correspond un point matériel de masse m et de coordonnées $-x$, $-y$, z. Donc les sommes Σmx, Σmy, Σmxz, Σmyz ne changent pas quand on remplace x, y, par $-x$, $-y$. Autrement dit ξ, η, D, E sont nuls, ce qui prouve que l'axe Oz est axe principal

de l'ellipsoïde central d'inertie. (On a par exemple $\Sigma mxz = -\Sigma mxz$, d'où $2\Sigma mxz = 0$ ou $2E = 0$.)

Un axe de symétrie d'un corps homogène est un diamètre pour une direction de plan perpendiculaire ; c'est donc un axe de l'ellipsoïde central d'inertie.

Si un corps homogène admet plus de trois axes de symétrie non situés dans un même plan, ces axes sont des axes de l'ellipsoïde central d'inertie qui est donc une sphère, ce qui revient à dire que le moment d'inertie a la même valeur pour toutes les droites issues du centre de masse. En particulier, il en est ainsi pour les corps homogènes ayant la forme d'un polyèdre régulier (tétraèdre régulier, cube, etc.).

Supposons que l'on ait un corps présentant la forme d'une plaque d'épaisseur négligeable. Prenons le point O sur la plaque et l'axe Oz perpendiculaire à la plaque. Puisque les cotes z des points de la plaque sont négligeables on aura

$$A = \Sigma my^2, \quad B = \Sigma mx^2,$$
$$C = \Sigma m(x^2 + y^2) = A + B,$$
$$D = 0, \quad E = 0, \quad F = \Sigma mxy.$$

On voit que l'axe Oz perpendiculaire à la plaque est un axe principal d'inertie ; on a d'ailleurs $A + B = C^{te} = C$, lorsqu'on fait tourner les axes Ox et Oy autour du point fixe O.

CHAPITRE XII

DYNAMIQUE DES SYSTÈMES. THÉORÈMES GÉNÉRAUX

83. Forces extérieures et forces intérieures. — Nous considérerons dans ce chapitre un système matériel comme formé par un ensemble de points matériels en nombre plus ou moins grand, chacun d'eux possédant une masse déterminée et étant séparé des autres points voisins par des intervalles plus ou moins petits. Si le système est soumis à des liaisons, nous rendrons la liberté à tous les points à condition d'adjoindre aux forces données des forces de liaison convenablement choisies.

Les forces appliquées aux points matériels sont de deux catégories. Il y a des forces intérieures, qui sont dues aux actions d'autres points matériels du système ; il y a les forces extérieures, qui sont dues aux actions de points matériels n'appartenant pas au système. D'après le principe d'action et de réaction, à toute force intérieure appliquée à un point du système correspond une autre force intérieure égale et directement opposée appliquée à un autre point du système. Les forces intérieures forment donc un système de vecteurs équivalent à zéro.

Il peut exister des forces intérieures de liaison comme les forces de cohésion qui dans un solide imposent aux points matériels de rester à des distances invariables et proviennent des actions mutuelles des points matériels très rapprochés.

Comme exemple simple de forces intérieures données on peut citer les attractions newtoniennes mutuelles des points matériels du système. Comme exemple simple de forces extérieures données on peut donner les poids des points matériels du système.

L'accélération $\vec{J}$ d'un point matériel du système est fournie par l'égalité géométrique fondamentale

$$m\vec{J} = \vec{F_e} + \vec{F_i},$$

où $\vec{F_e}$ et $\vec{F_i}$ désignent les résultantes des forces extérieures et des forces inté-

rieures appliquées au point matériel considéré. En projetant sur les trois axes on obtient les équations

$$(1)\quad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = X_e + X_i, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = Y_e + Y_i, \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = Z_e + Z_i, \end{cases}$$

où les expressions X_e, Y_e, Z_e, X_i, Y_i, Z_i représentent les projections des résultantes $\overrightarrow{F_e}$ et $\overrightarrow{F_i}$.

Le système des forces intérieures est équivalent à zéro. Par suite la somme de leurs projections sur les axes et la somme de leurs moments par rapport aux axes sont nulles. Cette remarque va nous permettre de former des combinaisons des équations (1) relatives aux différents points ne renfermant plus les projections des forces intérieures. Ces combinaisons seront précieuses, car dans les applications les forces intérieures sont souvent inconnues.

84. Théorème du mouvement du centre de masse ou théorème des projections des quantités de mouvement. — En ajoutant les équations (1) relatives aux différents points et à l'un quelconque des trois axes, on élimine les forces intérieures et on obtient

$$(2)\quad \begin{cases} \Sigma m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X_e, \\ \Sigma m\dfrac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y_e, \\ \Sigma m\dfrac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z_e. \end{cases}$$

Mais en dérivant deux fois par rapport au temps les équations

$$M\xi = \Sigma mx, \qquad M\eta = \Sigma my, \qquad M\zeta = \Sigma mz,$$

on trouve

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad M\frac{d^2\eta}{dt^2} = \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

D'où enfin

$$(3)\qquad M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma X_e, \qquad M\frac{d^2\eta}{dt^2} = \Sigma Y_e, \qquad M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Sigma Z_e.$$

Les seconds membres représentent les sommes des projections de toutes les forces extérieures sur les axes ; ils sont donc égaux aux projections de la somme géométrique des forces extérieures. Nous pouvons donc énoncer le théorème :

Le centre de masse d'un système se déplace comme un point matériel où serait concentrée la masse totale du système et qui serait soumis à une force équipollente à la somme géométrique $\overrightarrow{OR}$ des forces extérieures.

On a, en abrégé, $M . \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{OR}$.

Exemple I. — Si un système n'est soumis qu'à des forces intérieures, l'accélération du centre de masse est nulle et le centre de masse reste en repos ou bien a un mouvement rectiligne et uniforme ; c'est le cas du système solaire dans la mesure où l'on peut négliger les attractions des étoiles.

Exemple II. — Si un système déformable se meut sous l'action de la pesanteur, le centre de masse se déplace comme un point matériel pesant ; c'est le cas d'un jet d'eau, d'un obus qui explose sous l'action de forces intérieures (en négligeant la résistance de l'air),

Les équations (2) peuvent être interprétées d'une autre manière en introduisant, comme nous l'avons fait au n° 47, la quantité de mouvement de chaque point matériel. On a en effet $\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \Sigma m \frac{dx}{dt}$ et les deux autres équations qui s'en déduisent par permutation des lettres x, y, z. On peut donc écrire les équations (2) sous la forme

$$(3)^{\text{bis}} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \Sigma m \frac{dx}{dt} &= \Sigma X_e, \\ \frac{d}{dt} \Sigma m \frac{dy}{dt} &= \Sigma Y_e, \\ \frac{d}{dt} \Sigma m \frac{dz}{dt} &= \Sigma Z_e. \end{aligned} \right.$$

On peut ainsi énoncer le théorème suivant, qui n'est qu'une autre forme du théorème sur le mouvement du centre de masse :

La dérivée par rapport au temps de la somme des projections des quantités de mouvement sur un axe fixe est égale à la somme des projections des forces extérieures sur cet axe.

85. Théorème des moments des quantités de mouvement ou des moments cinétiques. — Formons une combinaison des deux dernières équations (2) de façon à faire intervenir le moment par rapport à l'axe Ox des forces appliquées au point matériel considéré. Nous obtenons comme au n° 47 l'équation

$$m\left(y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2}\right) = (yZ_e - zY_e) + (yZ_i - zY_i),$$

ou

$$\frac{d}{dt} m\left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}\right) = (yZ_e - zY_e) + (yZ_i - zY_i).$$

En faisant la somme des équations relatives aux différents points maté-

riels, nous éliminerons les forces intérieures, dont le moment résultant par rapport à l'axe Ox est nul. Nous avons donc

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=\Sigma y\mathrm{Z}_e-z\mathrm{Y}_e=\Sigma\mathrm{L}_e.$$

On obtient des équations analogues en faisant intervenir les moments par rapport aux axes Oy et Oz. D'où les équations importantes :

$$(4)\qquad\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\Sigma m\left(y\dfrac{dz}{dt}-z\dfrac{dy}{dt}\right)=\Sigma\mathrm{L}_e,\\[2mm]\dfrac{d}{dt}\Sigma m\left(z\dfrac{dx}{dt}-x\dfrac{dz}{dt}\right)=\Sigma\mathrm{M}_e,\\[2mm]\dfrac{d}{dt}\Sigma m\left(x\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dx}{dt}\right)=\Sigma\mathrm{N}_e.\end{cases}$$

Il est facile d'interpréter ces équations. On a en effet

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\Sigma y\left(m\frac{dz}{dt}\right)-z\left(m\frac{dy}{dt}\right).$$

Mais $\Sigma y\left(m\dfrac{dz}{dt}\right)-z\left(m\dfrac{dy}{dt}\right)$ représente manifestement la somme des moments par rapport à l'axe Ox des quantités de mouvement des différents points matériels.

On peut donc énoncer le théorème suivant, appelé théorème des moments des quantités de mouvement.

La dérivée par rapport au temps de la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à un axe fixe est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport à cet axe.

Cet énoncé rappelle celui du théorème des projections des quantités de mouvement.

La somme des moments des quantités de mouvement est souvent désignée sous le nom de *moment cinétique* du système. On a ainsi le nouvel énoncé :

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique par rapport à un axe fixe est égale au moment résultant des forces extérieures par rapport à cet axe.

Dans le cas particulier où le moment résultant des forces extérieures par rapport à un axe est nul, le moment cinétique du système par rapport à cet axe est constant. En supposant que cet axe est pris pour axe Oz, on a donc

$$\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\mathrm{C}.$$

Comme nous l'avons déjà remarqué au n° 22, la quantité $x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}$ est égale à $r^2\frac{d\theta}{dt}$, c'est-à-dire qu'elle est le double de la vitesse aréolaire $\frac{dA}{dt}$ de la projection du point considéré sur le plan xOy (ou, ce qui revient au même, sur tout plan perpendiculaire à Oz).

On a donc l'équation

$$\Sigma m\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d}{dt}\Sigma mA = \frac{C}{2},$$

d'où, en intégrant, $\Sigma mA = \frac{C}{2}t + C'$. Nous évaluerons les aires balayées à partir de l'instant $t = 0$, de sorte qu'à cet instant initial la somme ΣmA aura tous ses termes nuls ; la constante C' sera par suite nulle et nous aurons

$$\Sigma mA = \frac{C}{2}t.$$

Appelons, pour abréger, la somme ΣmA *l'aire totale balayée autour de l'axe* Oz ; ce langage commode ne devra pas d'ailleurs nous faire oublier que les aires A sont balayées sur un plan perpendiculaire à l'axe Oz. Nous pouvons énoncer le théorème suivant, appelé *théorème des aires totales :*

Lorsque le moment résultant des forces extérieures par rapport à un axe fixe est nul, l'aire totale balayée sur un plan perpendiculaire à cet axe varie proportionnellement au temps.

Il convient de remarquer que si la constante C, appelée constante des aires, est nulle, l'aire totale balayée restera nulle ; cela arrivera manifestement quand le système partira du repos ; en effet, la constante C a pour valeur $\Sigma m(x_0y'_0 - y_0x'_0)$ où x_0, y_0, x'_0, y'_0 sont les valeurs initiales de x, y, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$; si le système part du repos, la constante C sera nulle, car on aura $x'_0 = y'_0 = 0$.

Lorsque la constante C est nulle, il est nécessaire, pour que la somme algébrique ΣmA reste nulle, que toutes les aires balayées restent nulles à la fois ou qu'il existe des aires balayées dans les deux sens de rotation.

Exemple. — Considérons un homme placé sur un plan horizontal sans frottement. Supposons que l'homme, d'abord en repos, cherche à se retourner. Les forces extérieures (poids et réactions) sont toutes verticales. D'après le théorème du mouvement du centre de masse, celui-ci se déplace comme un point matériel abandonné sans vitesse et soumis à une force verticale. Donc le centre de masse G ne peut se déplacer que sur une verticale. Désignons par O le pied de la verticale du point G sur le plan horizontal et adoptons la droite fixe OG pour axe Oz. Le théorème des aires totales s'applique pour l'axe Oz,

car le moment résultant des forces extérieures par rapport à l'axe Oz est nul. De plus la constante C est nulle, puisque le système part du repos. On a donc $\Sigma mA = 0$. Pour arriver à faire tourner ses pieds dans un sens l'homme devra donc faire tourner d'autres parties du corps en sens inverse.

Supposons par exemple que l'homme donne à son bras droit, laissé rigide et d'abord abaissé, les trois mouvements successifs suivants : 1° il lève le bras de façon à l'amener à être horizontal et dirigé en avant ; pour cela il fait décrire au bras un quart de cercle dans un plan vertical ; 2° il fait décrire au bras un quart de cercle dans le plan horizontal passant par l'épaule de façon à amener le bras à être dirigé à droite ; 3° il abaisse le bras pour le ramener auprès du corps ; pour cela il fait décrire au bras un quart de cercle dans un plan vertical.

Les points matériels du bras droit ne balayent pas d'aire autour de l'axe Oz pendant le 1er et le 3e mouvement, mais pendant le 2e mouvement ils balayent des aires dans le sens qui va de la gauche à la droite de l'homme. Il résulte du théorème des aires que pendant le 2e mouvement du bras droit vers la droite, le reste du corps laissé rigide se tourne vers la gauche.

En répétant plusieurs fois de suite les trois mouvements, l'homme arrivera à tourner vers sa gauche d'un angle de plus en plus grand.

Ce qui précède montre qu'un homme placé sur un plan horizontal ne peut se retourner par une rotation d'ensemble que s'il y a frottement sur le plan horizontal.

86. Interprétation géométrique des théorèmes des projections des quantités de mouvement et des moments des quantités de mouvement. — Il est facile de généraliser aux systèmes matériels l'interprétation géométrique indiquée au n° 47 pour un point matériel. Si $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OK}$ sont les vecteurs issus de l'origine fixe O et représentant la somme géométrique des quantités de mouvement et le moment résultant des quantités de mouvement par rapport au point O ($\overrightarrow{OK}$ s'appelle comme nous l'avons déjà dit moment cinétique par rapport au point O), les dérivées géométriques de ces vecteurs sont respectivement égales à la somme géométrique $\overrightarrow{OR}$ et au moment résultant (par rapport au point O) $\overrightarrow{OG}$ des forces extérieures appliquées au système.

En effet, en projetant ces deux égalités géométriques sur trois axes fixes issus de O, on trouve des équations qui traduisent les théorèmes relatifs aux systèmes énoncés précédemment.

En désignant par $\overrightarrow{HV}$ et par $\overrightarrow{KV}$ les vitesses absolues des points H et K, on a donc

$$\overrightarrow{HV} \rightleftarrows \overrightarrow{OR},$$
$$\overrightarrow{KV} \rightleftarrows \overrightarrow{OG}.$$

87. Moment cinétique, par rapport à un axe fixe, d'un solide assujetti à tourner autour de cet axe. — Considérons un solide qui tourne autour d'un axe Oz, sans glisser le long de cet axe (comme par exemple une porte ou un rotor de machine électrique). Calculons le moment cinétique par rapport à l'axe Oz. Sa valeur est

$$\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \Sigma mr^2\frac{d\theta}{dt}.$$

Mais la quantité $\frac{d\theta}{dt}$ a même valeur pour tous les points du solide, car elle représente la vitesse angulaire ω de rotation du solide. Le moment cinétique cherché est donc

$$\Sigma mr^2\omega = \omega\Sigma mr^2 = \omega I_z.$$

Donc,

Pour un solide en rotation, le moment cinétique par rapport à l'axe de rotation a pour valeur le produit de la vitesse angulaire par le moment d'inertie du solide par rapport à cet axe.

88. Théorème des forces vives. — Il est aisé de généraliser les deux énoncés du théorème des forces vives donnés au n° 50.

Ecrivons le théorème des forces vives, sous sa forme différentielle, pour l'un des points matériels :

$$d\frac{1}{2}mv^2 = d\mathfrak{T}.$$

Le symbole $d\mathfrak{T}$ représente le travail élémentaire de la résultante des forces intérieures et extérieures appliquées au point considéré, c'est-à-dire la somme des travaux élémentaires de toutes les forces appliquées à ce point.

Ajoutons membre à membre les équations analogues relatives aux différents points. Nous obtenons

$$\Sigma d\frac{1}{2}mv^2 = \Sigma d\mathfrak{T},$$

c'est-à-dire

$$d\left(\frac{1}{2}\Sigma mv^2\right) = \Sigma d\mathfrak{T}.$$

La quantité Σmv^2 qui intervient dans le premier membre s'appelle *force vive du système ;* c'est la somme des forces vives des différents points.

La quantité $\frac{1}{2}\Sigma mv^2$, qui est la demi-force vive, s'appelle *énergie cinétique du système.* Nous pouvons donc énoncer le théorème :

La différentielle de l'énergie cinétique d'un système matériel est égale à la somme des travaux élémentaires de toutes les forces extérieures et intérieures appliquées aux différents points matériels.

Pour obtenir la somme des travaux élémentaires, on cherche séparément cette somme pour les forces intérieures, puis pour les forces extérieures et on ajoute.

Ecrivons maintenant le théorème des forces vives sous sa forme finie pour l'un des points matériels :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \mathcal{T}_{t_0}^{t}.$$

Ajoutons membre à membre les équations analogues relatives aux différents points. Nous obtenons

$$\sum\frac{1}{2}mv^2 - \sum\frac{1}{2}mv_0^2 = \Sigma\mathcal{T}_{t_0}^{t}.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème :

La variation de l'énergie cinétique d'un système pendant un intervalle de temps est égale à la somme des travaux pendant cet intervalle de temps de toutes les forces extérieures et intérieures appliquées aux différents points matériels.

Il convient d'insister sur ce fait que les forces intérieures interviennent dans le théorème des forces vives énoncé sous sa forme différentielle ou sous sa forme finie. Mais nous allons montrer, au n° 90, que la somme des travaux, pendant un intervalle de temps quelconque, des forces de cohésion d'un solide est nulle. Il en résulte que dans le théorème des forces vives *appliqué à un solide*, les forces intérieures n'interviennent pas. On a les énoncés suivants :

La différentielle de l'énergie cinétique d'un solide est égale à la somme des travaux élémentaires de toutes les forces extérieures appliquées au solide.

La variation de l'énergie cinétique d'un solide pendant un intervalle de temps est égale à la somme des travaux pendant cet intervalle de temps de toutes les forces extérieures appliquées au solide.

89. Remarque sur le travail élémentaire des forces. — Il arrive souvent qu'une force ne conserve pas dans son mouvement le même point matériel d'application. Un homme qui pousse devant lui un tonneau roulant sur le sol exerce avec ses mains des forces qui sont appliquées à des points matériels qui changent d'un instant à l'autre. On est alors embarrassé pour déterminer le travail élémentaire.

Contentons-nous de dire qu'il faut considérer comme déplacement élémentaire pendant l'intervalle de temps t, $t + dt$, non pas le déplacement pendant dt du point géométrique d'application, mais le déplacement $\vec{V}.dt$, pendant

dt, du point matériel auquel la force était appliquée à l'instant t ($\vec{V}$ désigne la vitesse de ce point matériel à l'instant t) ; ce n'est qu'à cette condition qu'on peut appliquer le théorème des forces vives.

Considérons par exemple une roue de voiture roulant sur un sol rugueux et ne touchant le sol qu'en un point A ; le sol exerce sur la roue une force de liaison oblique appliquée au point A ; si la roue roule sans glisser sur le sol, le point matériel de la roue qui est en contact avec le sol a une vitesse absolue nulle ; le déplacement élémentaire est donc nul et par suite le travail élémentaire est nul. En pratique, la roue touche le sol en une infinité de points rapprochés ; ce n'est qu'en première approximation que l'on peut considérer comme nulle la somme des travaux élémentaires des forces de liaison.

90. Travaux des forces intérieures d'un système. — Commençons par chercher la somme des travaux élémentaires des actions mutuelles de deux points A_1, A_2 (*fig.* 64) ; il s'agit donc d'une force $\vec{F_1}$ appliquée en A_1 et d'une force $\vec{F_2}$ égale et directement opposée à $\vec{F_1}$ et appliquée en A_2. En désignant par f la valeur commune de l'intensité des deux forces, comptée positivement dans le cas d'une répulsion, les projections de $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ sont

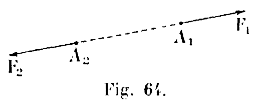


Fig. 64.

$$X_1 = f\frac{x_1 - x_2}{r}, \qquad Y_1 = f\frac{y_1 - y_2}{r}, \qquad Z_1 = f\frac{z_1 - z_2}{r},$$
$$X_2 = -X_1, \qquad Y_2 = -Y_1, \qquad Z_2 = -Z_1,$$

si r est la distance A_1A_2 des deux points. La somme des travaux élémentaires des deux forces considérées est

$$X_1dx_1 + Y_1dy_1 + Z_1dz_1 + X_2dx_2 + Y_2dy_2 + Z_2dz_2$$

ou

$$\frac{f}{r}\left[(x_1 - x_2)(dx_1 - dx_2) + (y_1 - y_2)(dy_1 - dy_2) + (z_1 - z_2)(dz_1 - dz_2)\right],$$

c'est-à-dire $$fdr,$$

car, en différentiant l'équation

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2,$$

on obtient

$$rdr = (x_1 - x_2)(dx_1 - dx_2) + (y_1 - y_2)(dy_1 - dy_2) + (z_1 - z_2)(dz_1 - dz_2).$$

Puisque la somme des travaux élémentaires des deux forces intérieures considérées est fdr, la somme des travaux élémentaires de toutes les forces inté-

rieures aura pour expression

$$\Sigma f dr,$$

la somme étant étendue à tous les groupes de deux forces intérieures égales et directement opposées.

L'expression $\Sigma f dr$ est donc la somme des travaux pendant l'intervalle de temps dt de toutes les forces intérieures ; on obtiendra, par suite, en intégrant par rapport au temps la somme des travaux pendant un intervalle de temps fini.

Supposons que les forces intérieures soient les forces de cohésion d'un solide. Toute distance r est invariable et par suite sa différentielle est nulle ; on a donc $f dr = 0$ et $\Sigma f dr = 0$; autrement dit la somme des travaux élémentaires de toutes les forces intérieures d'un solide est nulle ; puisque la somme des travaux des forces intérieures d'un solide est nulle pendant l'intervalle de temps dt, il en résulte que *la somme des travaux des forces intérieures d'un solide est nulle pendant un intervalle de temps quelconque.*

91. Fonction de forces. — On dit que l'ensemble des forces intérieures et extérieures d'un système dérive d'une fonction de forces, lorsque la somme des travaux élémentaires de toutes les forces peut se mettre sous la forme de la différentielle d'une fonction U, appelée fonction de forces et ne dépendant que des coordonnées des différents points matériels. On a donc dans un tel cas

$$\Sigma d\mathfrak{T} = d\mathrm{U}.$$

Le théorème des forces vives donne alors

$$d\left(\sum \frac{1}{2} mv^2\right) = d\mathrm{U},$$

d'où, en intégrant,

$$\sum \frac{1}{2} mv^2 = \mathrm{U} + \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$$

ou

$$\sum \frac{1}{2} mv^2 - \mathrm{U} = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}.$$

La quantité — U s'appelle énergie potentielle, d'où l'énoncé :

Lorsque l'ensemble des forces extérieures et intérieures dérive d'une fonction de forces U, *la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle* — U *reste constante.*

Il convient de remarquer que la fonction de forces n'est déterminée qu'à une constante additive près.

Supposons en particulier qu'il s'agisse d'un solide libre soumis à des forces extérieures qui dérivent chacune d'une fonction de forces. Le travail élémen-

taire des forces extérieures F_1, F_2, F_3, ... est respectivement égal à dU_1, dU_2, dU_3, ... ; la somme des travaux élémentaires de toutes les forces intérieures est d'ailleurs nulle. Donc la somme des travaux élémentaires de toutes les forces est égale à

$$dU_1 + dU_2 + dU_3 + \ldots = d(U_1 + U_2 + U_3 + \ldots).$$

Le système des forces appliquées au solide dérive donc d'une fonction de forces $U = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots$ Le solide admet donc une énergie potentielle $-U$.

Soit par exemple un solide libre soumis seulement à la pesanteur. Adoptons un axe Oz vertical vers le haut. Le poids mg d'un élément matériel dérive de la fonction de forces $-mgz$ (n° 45). L'ensemble des poids dérive donc de la fonction de forces $\Sigma - mgz = -g\Sigma mz = -Mg\zeta$. On a donc

$$U = -Mg\zeta$$

92. Repère de Kœnig. — On appelle repère de Kœnig un système de trois axes $Gx'y'z'$ issus du centre de masse et parallèles aux axes fixes $Oxyz$. Le repère de Kœnig est donc animé d'une translation.

Proposons-nous d'étudier le mouvement relatif d'un système par rapport au repère de Kœnig. D'après la théorie des mouvements relatifs d'un point matériel (n° 70), on peut considérer le repère de Kœnig comme fixe à condition d'ajouter à chaque point matériel la force d'inertie d'entraînement et la force de Coriolis.

D'ailleurs la force de Coriolis de chaque point matériel est nulle, car l'accélération composée est nulle dans une translation. La force d'inertie d'entraînement d'un point matériel a pour valeur $-m\vec{J}_e$. D'ailleurs le vecteur $\vec{J}_e$ qui représente l'accélération d'entraînement reste équipollent à lui-même quand on passe d'un point à un autre, car dans un mouvement de translation tous les points sont à chaque instant animés d'une même accélération.

Considérons le repère de Kœnig comme fixe. Appliquons d'abord le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport aux axes $Gx'y'z'$. Remarquons que les vecteurs parallèles $-mJ_e$, étant proportionnels aux masses, admettent une résultante $-MJ_e$ appliquée au centre de masse G. Le moment résultant des forces d'inertie d'entraînement est donc nul par rapport aux axes $Gx'y'z'$.

Il en résulte que le moment résultant, par rapport à chacun des axes $Gx'y'z'$, des forces données, de liaison et d'inertie d'entraînement, est égal au moment résultant des seules forces données et de liaison. Par suite, *le théorème des moments des quantités de mouvement s'applique dans le mouvement relatif par rapport au repère de Kœnig.*

Appliquons maintenant le théorème des forces vives par rapport aux axes

$Gx'y'z'$ traités comme s'ils étaient fixes. Il est aisé de voir que la somme des travaux des forces d'inertie d'entraînement est nulle. Désignons en effet par j_1, j_2, j_3 les projections de $\vec{J}_e$ sur les axes. La somme des travaux élémentaires des forces d'inertie d'entraînement, dans les déplacements par rapport au repère de Kœnig, est égale à $\Sigma - mj_1dx' - mj_2dy' - mj_3dz'$, c'est-à-dire à $-j_1\Sigma mdx' - j_2\Sigma mdy' - j_3\Sigma mdz'$, où les sommes Σ sont étendues aux différents points matériels. Mais ces sommes sont nulles, car on a

$$\Sigma mdx' = d\Sigma mx' = d\mathrm{M}\xi' = \mathrm{M}d\xi',$$
$$\Sigma mdy' = \mathrm{M}d\eta',$$
$$\Sigma mdz' = \mathrm{M}d\zeta'$$

et les coordonnées ξ', η', ζ' du point G sont constamment nulles et par suite ont des différentielles nulles.

Nous voyons que la somme des travaux des forces données, de liaison et d'inertie d'entraînement est égale à la somme des travaux des seules forces données et de liaison. Par suite, *le théorème des forces vives s'applique dans le mouvement relatif par rapport au repère de Kœnig.*

CHAPITRE XIII

MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN AXE FIXE

93. Equation du mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe. — Considérons, comme au n° 87, un solide qui tourne autour d'un axe fixe Oz sans glisser le long de cet axe. Nous supposerons que les liaisons sont réalisées de la manière suivante : d'une part le point O du solide est immobilisé grâce à un petit anneau qui s'engage sans frottement dans un petit anneau fixe ; d'autre part l'axe de rotation, fixé au point O, est empêché de se déplacer grâce à un manchon d'axe Oz, sans frottement, installé au voisinage du point A de l'axe Oz (*fig.* 65). Nous pourrons considérer le corps solide comme libre à condition de remplacer les liaisons par des forces convenables : on supprimera la liaison du point O en appliquant au point O une force de liaison R' ; on supprimera la liaison sans frottement due au manchon en appliquant au point A une force de liaison R'' normale au manchon, c'est-à-dire normale à l'axe Oz.

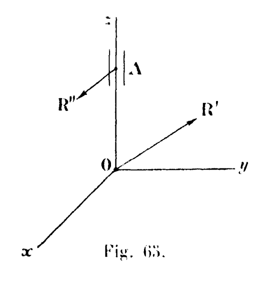


Fig. 65.

Les deux seules forces de liaison R' et R'' ont un moment nul par rapport à l'axe Oz.

Proposons-nous d'abord de déterminer le mouvement du solide sous l'action des forces données. Cela est possible sans qu'il soit nécessaire de connaître ni les forces de liaison ni les forces intérieures.

Appliquons en effet le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe fixe Oz. Nous avons vu au n° 87 que le moment cinétique par rapport à l'axe Oz avait pour valeur ωI_z, ω étant la vitesse angulaire du solide et I_z étant le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Oz, moment d'inertie qui a une valeur constante, puisque l'axe Oz a une

position invariable par rapport au solide. Nous avons donc

$$\frac{d}{dt}(\omega I_z) = \Sigma N_e, \qquad \text{ou} \qquad I_z \frac{d\omega}{dt} = \Sigma N_e.$$

La somme ΣN_e est égale au moment résultant N des forces données par rapport à l'axe Oz, car les deux forces de liaison ont un moment nul par rapport à Oz. D'où l'équation

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = N.$$

D'ailleurs si α désigne l'angle polaire θ de l'un des points du solide, on a $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$; de plus on a l'habitude d'écrire I au lieu de I_z.

On a donc

$$(1) \qquad I \frac{d^2\alpha}{dt^2} = N.$$

Cette équation importante, appelée équation du mouvement, est plus facile à retenir si on la compare à l'équation du mouvement rectiligne d'un point matériel (n° 51),

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X.$$

La quantité N est une fonction connue de α, $\frac{d\alpha}{dt}$, t, en sorte que l'équation (1) est une équation différentielle du second ordre à une fonction inconnue α d'une variable t.

En multipliant les deux membres de l'équation (1) par $\frac{d\alpha}{dt}$, on obtient

$$I \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} = N \frac{d\alpha}{dt},$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} I \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\right] = N \frac{d\alpha}{dt},$$

ou, en multipliant les deux membres par dt,

$$(2) \qquad d\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right) = N d\alpha,$$

équation équivalente à l'équation (1).

Il est remarquable que l'application du théorème des forces vives sous sa forme différentielle conduit précisément à l'équation (2). En effet, la force vive du solide est égale à $\Sigma mv^2 = \Sigma m(\omega r)^2 = \omega^2 \Sigma mr^2 = \omega^2 I$.

D'ailleurs la somme des travaux élémentaires des forces extérieures données est égale à $\Sigma X dx + Y dy + Z dz$, mais on a, pour chacun des points maté-

riels d'application des forces considérées, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = c^{te}$, $r = c^{te}$ et, par suite, $dx = -y d\theta$, $dy = +x d\theta$, $dz = 0$.

La somme des travaux élémentaires des forces extérieures données est donc égale à

$$\Sigma(xY - yX)d\theta, \qquad \text{c'est-à-dire à} \qquad d\alpha \,.\, \Sigma(xY - yX), \qquad \text{ou} \qquad d\alpha \,.\, N,$$

car les angles θ relatifs aux différents points d'application ont la même valeur pour leur différentielle, puisque les angles $d\theta$ sont égaux à l'angle infiniment petit $d\alpha$ dont tourne le solide ; enfin les deux forces de liaison ne travaillent pas. En résumé, la différentielle de l'énergie cinétique est $d\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right)$ tandis que la somme des travaux élémentaires des forces extérieures est égale à $N \,.\, d\alpha$.

Remarque. — Nous avons supposé que les liaisons étaient réalisées d'une certaine manière. Plus généralement, on dit que les liaisons qui ne tolèrent qu'une rotation du solide sont sans frottement si les forces de liaison ne travaillent pas. Nous voyons que l'équation (2) et par suite l'équation (1) s'appliqueraient au mouvement d'un corps solide assujetti à une rotation par des liaisons quelconques sans frottement. On pourra par exemple supposer fixés deux points du solide ou même supposer fixés plusieurs points alignés du solide.

L'équation des forces vives sous sa forme finie est

$$\frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \int_{\alpha_0}^{\alpha} N d\alpha.$$

Cette équation est surtout utile si N ne dépend que de α et si l'on sait effectuer la quadrature $\int N d\alpha = F(\alpha)$. On a alors

$$\frac{1}{2}I\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2 = F(\alpha) - F(\alpha_0).$$

On voit que l'on obtiendra α en fonction du temps par une quadrature.

Exemple I. — *Mouvement d'un corps homogène pesant, de révolution, tournant autour de son axe maintenu fixe, et soumis à l'action d'un couple constant.*

Quelle que soit l'orientation de l'axe, le moment résultant des poids par rapport à l'axe est nul, puisque les poids ont une résultante appliquée au centre de gravité, qui coïncide sensiblement avec le centre de masse (n° 74) situé sur l'axe. On a donc, en désignant par N l'intensité constante du couple,

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{N}{I} = C^{te}.$$

On voit que le mouvement angulaire est uniformément varié. Les circonstances du mouvement angulaire sont les mêmes que celles du mouvement vertical d'un point pesant dans le vide.

Exemple II. — *Mouvement d'un corps homogène de révolution, tournant autour de son axe maintenu fixe, et soumis à l'action d'un couple antagoniste dont le moment est proportionnel à l'angle d'écart α compté à partir d'une position donnée, et à l'action d'une résistance dont le moment est proportionnel à la vitesse angulaire* $\frac{d\alpha}{dt}$.

Soit $-\lambda\alpha$ le moment par rapport à l'axe du couple antagoniste, λ étant positif ; soit $-2\mu\frac{d\alpha}{dt}$ le moment de la résistance, μ étant positif. L'équation (1) est, puisque le moment du poids total est nul,

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\lambda\alpha - 2\mu\frac{d\alpha}{dt}.$$

En posant $\lambda = a^2I$, $\mu = bI$, l'équation devient

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2b\frac{d\alpha}{dt} + a^2\alpha = 0.$$

Cette équation différentielle a la même forme que celle que nous avons considérée au n° 53. Si b est nul, le mouvement angulaire est oscillatoire périodique conformément à l'équation

$$\alpha = C_1 \cos at + C_2 \sin at,$$

la période du mouvement étant $T = \frac{2\pi}{a}$.

Si b n'est pas nul le mouvement est amorti ; si $b < a$, le mouvement est oscillatoire avec des oscillations qui vont en décroissant en progression géométrique, la durée des oscillations doubles étant $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$; si $b \geqslant a$ le mouvement amorti a une oscillation au plus.

94. Calcul des réactions. — Il est facile de déterminer les forces de liaison dans le cas où les liaisons sont réalisées par la fixité du point O et par un manchon sans frottement en A. Il suffit, comme nous allons le voir, d'appliquer le théorème du mouvement du centre de masse et le théorème des moments des quantités de mouvement.

Désignons par X', Y', Z' ; X'', Y'', $Z'' = 0$, les projections des deux forces de liaison sur les axes fixes $Oxyz$, par X, Y, Z les sommes des projections des forces extérieures sur les mêmes axes, par L, M, N les moments résultants des forces extérieures par rapport aux mêmes axes.

Nous aurons, grâce au théorème du mouvement du centre de masse,

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = X' + X'' + X,$$

$$M\frac{d^2\eta}{dt^2} = Y' + Y'' + Y,$$

$$M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = Z' + Z.$$

Nous aurons de plus, en appliquant le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport aux axes fixes Ox et Oy et en posant $\overline{OA} = h$,

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = -hY'' + L,$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = +hX'' + M.$$

D'ailleurs on a, comme nous l'avons déjà remarqué,

$$dx = -yd\theta, \qquad dy = +xd\theta, \qquad dz = 0,$$

et par suite

$$\frac{dx}{dt} = -y\frac{d\theta}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = +x\frac{d\theta}{dt}, \qquad \frac{dz}{dt} = 0,$$

c'est-à-dire
$$\frac{dx}{dt} = -\omega y, \qquad \frac{dy}{dt} = +\omega x, \qquad \frac{dz}{dt} = 0\,;$$

de plus la cote ζ du centre de masse est constante, ce qui entraîne $\frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0$.

Les cinq inconnues X', Y', Z', X'', Y'' satisfont donc aux cinq équations linéaires

$$(2)\quad \begin{cases} M\dfrac{d^2\xi}{dt^2} = X' + X'' + X, \\ M\dfrac{d^2\eta}{dt^2} = Y' + Y'' + Y, \\ 0 = Z' + Z, \\ -\dfrac{d}{dt}\omega\Sigma mxz = -hY'' + L, \\ -\dfrac{d}{dt}\omega\Sigma myz = hX'' + M. \end{cases}$$

Dans ces équations, les expressions variables $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, Σmxz, Σmyz, pourront être calculées aisément en fonction du temps, si l'on connait la loi du mouvement sous la forme finie $\alpha = F(t)$. Quant aux quantités X, Y, Z, L, M, elles se rapportent aux forces données qui dépendent d'une façon connue de α, t, et

parfois $\frac{d\alpha}{dt}$. Donc si la loi du mouvement a pu être déterminée par l'intégration de l'équation (1), on aura les forces de liaison en fonction du temps en utilisant les équations (2).

Supposons qu'il s'agisse du cas particulier pour lequel l'axe de rotation passe par le centre de masse G et est un axe principal d'inertie pour ce centre de masse. Les équations (2) se simplifient, car les quatre expressions $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, Σmxz, Σmyz sont constamment nulles ; les deux premières expressions sont nulles parce que le centre de masse est immobile ; les deux autres expressions sont nulles parce que l'axe Oz étant un axe de l'ellipsoïde central d'inertie, cet axe sera principal d'inertie pour tous ses points (n° 82), ce qui exige $D = \Sigma mxz = 0$ et $E = \Sigma myz = 0$.

Les équations (2) deviennent

$$(3) \quad \begin{cases} X' + X'' = -X, \\ Y' + Y'' = -Y, \\ Z' = -Z, \\ +hY'' = L, \\ hX'' = -M. \end{cases}$$

Supposons de plus que les quantités X, Y, Z, L, M soient indépendantes du temps. D'après les équations (3) les quantités X', X'', Y', Y'', Z' seront indépendantes du temps. Autrement dit, les forces de liaison seront les mêmes à l'état de mouvement qu'à l'état de repos.

Remarquons que le poids total est une force invariable, car son point d'application G est fixe dans notre cas particulier. On pourra donc réaliser l'invariance des quantités X, Y, Z, L, M en adoptant comme forces données autres que celles dues à la pesanteur des forces invariables et des couples variables d'axe Oz.

Dans les machines, on a manifestement intérêt à ce que les parties tournantes (arbres de transmission, poulies, rotors) exercent sur leurs supports des réactions invariables. Ces supports ne vibrent alors pas et ils résistent aussi bien pendant le mouvement que pendant l'arrêt. Ce qui précède fait comprendre pourquoi on s'efforce de « centrer » les parties tournantes de façon à se rapprocher de l'idéal pour lequel l'axe de rotation est axe principal d'inertie.

95. Axes permanents de rotation. — Supposons que les forces extérieures admettent une résultante passant par le point O (comme cela arrive par exemple pour un corps soumis uniquement à son poids, suspendu par son centre

de masse en O et maintenu par un manchon A). Dans ces conditions on a $L = M = N = 0$. L'équation du mouvement (1) donne $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0$, d'où $\omega = \frac{d\alpha}{dt} = C^{te}$. Le solide tourne donc avec une vitesse angulaire constante.

Supposons de plus que l'axe Oz soit principal d'inertie pour le point O, de telle sorte que l'on ait constamment $\Sigma mxz = 0$ et $\Sigma myz = 0$. Les deux dernières équations (2) se réduisent à $hY'' = 0$, $hX'' = 0$. La force de liaison du manchon est donc nulle. Puisque le solide ne reçoit aucune action du manchon, celui-ci peut être supprimé. Donc un corps solide soumis à des forces admettant une résultante passant par O tournera indéfiniment à vitesse angulaire constante autour d'un axe passant par O, si l'axe autour duquel on lui impose la rotation initiale est un axe principal d'inertie pour le point O. On traduit ce fait en disant que les trois axes principaux d'inertie issus du point O sont des *axes permanents de rotation*.

Cette théorie reçoit une application dans les meules de moulin, qui ont un seul point fixe et qui tournent autour d'un axe principal d'inertie relatif au point fixe.

Supposons maintenant que le solide ne soit soumis à aucune force extérieure. Nous aurons $X = Y = Z = L = M = N = 0$. Supposons de plus que l'axe de rotation soit un axe principal de l'ellipsoïde central d'inertie. Le centre de masse sera situé sur l'axe de rotation et sera, par suite, immobile. On aura constamment $\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0$, $\frac{d^2\eta}{dt^2} = 0$, $\Sigma mxz = 0$, $\Sigma myz = 0$ (l'axe Oz est principal d'inertie pour le point O, puisqu'il est un axe de l'ellipsoïde central d'inertie). L'équation du mouvement montre que la vitesse angulaire $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ reste constante.

Les équations (2) deviennent

$$X' + X'' = 0, \quad Y' + Y'' = 0, \quad Z' = 0, \quad -hY'' = 0, \quad hX'' = 0.$$

Les quantités X', X'', Y', Y'', Z' sont donc nulles. Par suite on peut supprimer les liaisons.

Donc *un solide libre qui n'est soumis à aucune force et qui à l'instant initial est animé d'une rotation autour d'un axe de l'ellipsoïde central d'inertie continue à tourner indéfiniment à vitesse angulaire constante autour de cet axe qui reste fixe.*

96. Pendule composé. — On appelle *pendule composé* un corps solide pouvant tourner autour d'un axe horizontal et soumis à la seule action de la pesanteur.

Rapportons le système à des axes fixes, l'axe de rotation, appelé aussi axe de suspension, étant pris pour axe Oz, le plan xOy contenant le centre de masse et l'axe Ox étant dirigé vers le bas. Désignons par a la distance OG du centre de masse à l'axe de suspension et par α l'angle xOG (*fig.* 66). Le moment résultant N des forces extérieures par rapport à l'axe Oz est égal au moment du poids total $P = Mg$. L'équation du mouvement (n° 93) est donc

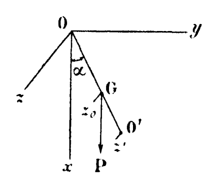


Fig. 66.

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -Mga\sin\alpha,$$

ou

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{Ma}{I}\cdot g\sin\alpha = 0.$$

Or nous avons vu, au n° 64, que l'équation différentielle du mouvement d'un pendule simple était

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0.$$

Si l'on pose $\lambda = \frac{I}{Ma}$ on constate que l'équation différentielle du pendule composé est identique à celle du pendule simple, à un changement de notations près (α, λ au lieu de θ, l). Nous pouvons en conclure que la droite OG du solide se meut comme le fil d'un pendule simple de longueur $\lambda = \frac{I}{Ma}$. La quantité $\lambda = \frac{I}{Ma}$ s'appelle pour cette raison longueur du *pendule simple synchrone*.

La durée des oscillations doubles infiniment petites du pendule composé est égale à

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mag}}.$$

Portons sur la demi-droite OG une longueur $OO' = \lambda$, puis menons par le point O' une parallèle $O'z'$ à l'axe Oz. La droite $O'z'$ liée au solide s'appelle l'axe d'oscillation ; les points de cet axe se meuvent comme des pendules simples de longueur λ.

Théorème. — *Il y a réciprocité entre les axes d'oscillation et de suspension.*

Cette réciprocité signifie que si l'on suspend le pendule composé par son axe d'oscillation $O'z'$, l'ancien axe de suspension Oz' devient le nouvel axe d'oscillation.

Menons en effet par le point G la parallèle Gz_0 à l'axe Oz. Nous aurons

(nº 81), en désignant par I_0 le moment d'inertie par rapport à l'axe Oz_0,

$$I = I_0 + Ma^2, \qquad \lambda = \frac{I}{Ma} = a + \frac{I_0}{Ma}.$$

Il en résulte que le point O' est situé sur le prolongement du segment OG à une distance $GO' = \lambda - a = \frac{I_0}{Ma}$ du point G. En désignant par a' cette distance GO' on a donc $a' = \frac{I_0}{Ma}$, ou

$$aa' = \frac{I_0}{M}.$$

Si l'axe $O'z'$ devient axe de suspension, I_0 et M gardent leur valeur, a' joue le rôle de a et la longueur a'' qui joue le rôle de a' doit satisfaire à

$$a'a'' = \frac{I_0}{M}.$$

On a donc $a'' = a$; autrement dit c'est l'axe Oz qui jouera le rôle d'axe d'oscillation.

CHAPITRE XIV

PROBLÈMES SUR LE MOUVEMENT DES SYSTÈMES

97. Mouvement d'un système non invariable. — L'étude du mouvement d'un système de points matériels libres ou soumis à des liaisons qui ne laissent pas constantes les distances mutuelles est un problème difficile. Il faut en effet considérer le mouvement de chacun des points soumis aux forces extérieures et intérieures qui lui sont appliquées. Les théorèmes du mouvement du centre de masse et des moments des quantités de mouvement renseignent sur le mouvement, mais ne donnent pas la solution complète.

Exemple. — *Mouvement de deux points matériels exerçant l'un sur l'autre une attraction proportionnelle à la distance.*

Soient x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 les coordonnées des deux points A_1 et A_2 de masses m_1 et m_2. Soient F_1 et F_2 les deux forces attractives. Les projections de ces forces sont

$$X_1 = -km_1m_2(x_1 - x_2), \quad Y_1 = -km_1m_2(y_1 - y_2), \quad Z_1 = -km_1m_2(z_1 - z_2),$$
$$X_2 = -X_1, \qquad Y_2 = -Y_1, \qquad Z_2 = -Z_1.$$

Puisque le système n'est soumis qu'à des forces intérieures, le centre de masse G se meut comme un point matériel libre qui ne serait soumis à aucune force. Le point G décrit donc une droite d'un mouvement uniforme, à moins qu'il ne soit fixe. On a donc

$$\xi = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = At + A', \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = 0,$$
$$\eta = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2} = Bt + B', \qquad \frac{d^2\eta}{dt^2} = 0,$$
$$\zeta = \frac{m_1z_1 + m_2z_2}{m_1 + m_2} = Ct + C', \qquad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0.$$

Les constantes A, B, C, A′, B′, C′ sont fournies par les conditions initiales.

Soient $Gx'y'z'$ des axes issus du centre de masse G et parallèles aux axes

fixes. Les nouvelles coordonnées des points sont

$$x'_1 = x_1 - \xi = m_2 \frac{x_1 - x_2}{m_1 + m_2}, \dots$$

$$x'_2 = x_2 - \xi = m_1 \frac{x_2 - x_1}{m_1 + m_2}, \dots$$

On a d'ailleurs

$$\frac{d^2x'_1}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2} - \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2}, \dots$$

$$\frac{d^2x'_2}{dt^2} = \frac{d^2x_2}{dt^2} - \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2x_2}{dt^2}, \dots$$

Les équations du mouvement du point A_1 sur les axes fixes sont, d'après l'égalité fondamentale de la dynamique,

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = -km_1m_2(x_1 - x_2),$$

$$m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} = -km_1m_2(y_1 - y_2),$$

$$m_1 \frac{d^2z_1}{dt^2} = -km_1m_2(z_1 - z_2).$$

Ces équations peuvent s'écrire

$$\frac{d^2x'_1}{dt^2} = -k(m_1 + m_2)x'_1,$$

$$\frac{d^2y'_1}{dt^2} = -k(m_1 + m_2)y'_1,$$

$$\frac{d^2z'_1}{dt^2} = -k(m_1 + m_2)z'_1.$$

On voit que le mouvement relatif du point A par rapport aux axes $O'x'y'z'$ est le même que le mouvement absolu d'un point soumis à une force centrale proportionnelle à la distance (n° 56) et d'intensité $km_1(m_1 + m_2)r$. On en déduit que le point A_1 décrit, dans le mouvement relatif, une ellipse E_1 de centre G suivant la loi des aires, la période du mouvement étant égale à

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k(m_1 + m_2)}}.$$

On verrait de même que le point A_2 décrit dans le mouvement relatif une ellipse E_2, homothétique de l'ellipse E_1, avec la même période.

Remarquons que le trièdre $O'x'y'z'$ n'est autre que le repère de Kœnig. L'application du théorème des moments des quantités de mouvement au système des deux points dans le mouvement relatif, nous indiquerait seulement

que l'aire totale balayée autour des axes Gx', Gy', Gz' est proportionnelle au temps.

98. Mouvement d'un solide gêné par des liaisons complètes sans frottement. — On dit qu'un solide est gêné par des liaisons complètes lorsque le déplacement du solide ne dépend que d'un paramètre. Cela signifie qu'il suffit de savoir la valeur d'une variable, appelée paramètre de position, pour connaître la position du solide.

Un solide assujetti à tourner autour d'un axe, sans glisser le long de cet axe, est soumis à des liaisons complètes ; le paramètre de position est alors l'angle α défini au nº 92.

Si les liaisons sont sans frottement, comme nous le supposerons, la somme des travaux élémentaires des forces de liaison est nulle. Les forces de liaison n'interviennent donc pas dans le théorème des forces vives.

Pour étudier le mouvement du solide, on commence par appliquer le théorème des forces vives sous sa forme différentielle ou sous sa forme finie ; on obtient ainsi une équation différentielle du second ordre ou du premier ordre que l'on cherchera à intégrer pour déterminer la valeur du paramètre de position en fonction du temps.

Le théorème du mouvement du centre de masse fournit la somme géométrique des forces de liaison. Le théorème des moments des quantités de mouvement, appliqué au repère de Kœnig, fournit le moment résultant des forces de liaison par rapport au centre de masse.

Exemple. — *Mouvement sans frottement d'une vis non pesante dans un écrou fixe, sous l'action d'un couple constant dont les deux forces sont situées dans un plan perpendiculaire à l'axe de la vis, en supposant le centre de masse situé sur l'axe de la vis.*

Désignons par C l'intensité constante du couple ; C est donc le moment résultant des forces données par rapport à l'axe de la vis. Adoptons pour paramètre de position l'angle α dont tourne à partir de l'instant initial un plan passant par l'axe et lié à la vis. Prenons l'axe de la vis pour axe Oz, et pour origine la position initiale du centre de masse. La cote ζ du centre de masse G est liée à l'angle α par la relation $\frac{\zeta}{p} = \frac{\alpha}{2\pi}$ qui exprime que la progression de la vis est proportionnelle à sa rotation et est égale au pas p pour une rotation d'un tour, c'est-à-dire de 2π radians.

Calculons l'énergie cinétique $\Sigma \frac{1}{2} mv^2$ de la vis. Pour déterminer la vitesse v d'un point matériel de coordonnées r, θ, z, nous considérerons le mouvement relatif par rapport au repère de Kœnig. La vitesse v est la résul-

tante de la vitesse d'entraînement v_e et de la vitesse relative v_r. D'ailleurs la vitesse d'entraînement v_e est parallèle à l'axe, tandis que la vitesse relative v_r est perpendiculaire à l'axe ; les deux composantes v_e et v_r de la vitesse v étant perpendiculaires, nous avons donc $v^2 = v_e^2 + v_r^2$, et par suite

$$\sum \frac{1}{2} mv^2 = \sum \frac{1}{2} mv_e^2 + \sum \frac{1}{2} mv_r^2.$$

Il est facile de calculer $\Sigma \frac{1}{2} mv_e^2$, car le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation ; v_e a donc même valeur pour tous les points, cette valeur étant égale à $\frac{d\zeta}{dt}$; on a par suite

$$\sum \frac{1}{2} mv_e^2 = \frac{1}{2} \mathrm{M} \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{M}p^2}{4\pi^2} \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2.$$

Il est facile de calculer $\Sigma \frac{1}{2} mv_r^2$, car le mouvement relatif est un mouvement de rotation autour de l'axe Oz. On a $v_r = r \frac{d\theta}{dt} = r$. Mais la différence $\theta - \alpha$ a une valeur constante pour chacun des points matériels ; on a donc

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{1}{2} mv_r^2 = \frac{1}{2} \mathrm{I} \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2,$$

en désignant par I le moment d'inertie Σmr^2 de la vis par rapport à son axe.

L'énergie cinétique de la vis a pour valeur, d'après ce qui précède,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \left(\mathrm{I} + \frac{\mathrm{M}p^2}{4\pi^2}\right).$$

Le théorème des forces vives sous sa forme différentielle nous donne

$$d\left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \left(\mathrm{I} + \frac{\mathrm{M}p^2}{4\pi^2}\right)\right] = \mathrm{C}d\alpha,$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \left(\mathrm{I} + \frac{\mathrm{M}p^2}{4\pi^2}\right)\right] = \mathrm{C}\frac{d\alpha}{dt},$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{I} + \frac{\mathrm{M}p^2}{4\pi^2}}.$$

On voit que $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ garde une valeur constante, que nous désignerons pour abréger par k^2. On aura

$$\frac{d\alpha}{dt} = k^2 t + h \quad (h = \text{valeur initiale de la vitesse angulaire}),$$

$$\alpha = \frac{k^2}{2} t^2 + ht \quad (\text{la valeur initiale de } \alpha \text{ est nulle}).$$

Puisque ζ est proportionnelle à α, on voit que le centre de masse est animé d'un mouvement uniformément accéléré.

Désignons par X_l, Y_l, Z_l les projections de la somme géométrique des forces de liaison exercées par l'écrou sur le filet de la vis. Les équations du mouvement du centre de masse sont

$$X_l = 0,$$
$$Y_l = 0,$$
$$M\frac{d^2\zeta}{dt} = Z_l.$$

D'ailleurs
$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{p}{2\pi}\cdot\frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

La somme géométrique des forces de liaison est donc parallèle à l'axe de la vis et a pour valeur constante

$$\frac{pM}{2\pi}\cdot\frac{C}{1+\frac{Mp^2}{4\pi^2}}.$$

Désignons par L_l, M_l, N_l les projections du moment résultant des forces de liaison par rapport au centre de masse.

Le théorème des moments des quantités de mouvement appliqué dans le mouvement relatif par rapport au repère de Kœnig $Ox'y'z'$, en projection sur les axes Gx', Gy', Gz', va nous donner la valeur de L_l, M_l, N_l. D'ailleurs les projections du moment résultant des quantités de mouvement relatives se calculent aisément, car le mouvement relatif est une rotation.

En opérant comme dans le problème du pendule composé, remarquons que l'on a

$$dx' = -y'd\theta, \qquad dy' = -x'd\theta, \qquad dz' = 0$$

et par suite

$$\frac{dx'}{dt} = -\omega y', \qquad \frac{dy'}{dt} = +\omega x', \qquad \frac{dz'}{dt} = 0.$$

Les projections du moment résultant des quantités de mouvement sont

$$\Sigma m\left(y'\frac{dz'}{dt} - z'\frac{dy'}{dt}\right) = -\omega\Sigma mx'z',$$
$$\Sigma m\left(z'\frac{dx'}{dt} - x'\frac{dz'}{dt}\right) = -\omega\Sigma my'z',$$
$$\Sigma m\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right) = \omega\Sigma mr^2 = \omega I.$$

On a donc

$$-\frac{d}{dt}(\omega\Sigma mx'z') = L_t,$$

$$-\frac{d}{dt}(\omega\Sigma my'z') = M_t,$$

$$I\frac{d\omega}{dt} = N_t + C.$$

Remarquons que les quantités $\Sigma mx'z'$ et $\Sigma my'z'$ dépendent du temps en général ; mais elles sont constamment nulles si l'axe de la vis est axe principal d'inertie pour le point G. Si nous supposons qu'il en est ainsi, nous aurons tout simplement

$$L_t = 0, \qquad M_t = 0, \qquad N_t = \frac{IC}{I + \frac{Mp^2}{4\pi^2}} - C.$$

Nous voyons donc que si l'axe de la vis est axe principal d'inertie pour le centre de masse G, le système des forces de liaison a, par rapport au point G, un moment résultant constant dirigé suivant l'axe de la vis.

99. Mouvement d'un solide. — Nous sortirions du cadre de cet ouvrage si nous voulions étudier le mouvement d'un solide libre ou celui d'un solide gêné dont la position dépend de plus d'un paramètre. Contentons-nous d'indiquer que l'on traite ces problèmes en appliquant les théorèmes généraux. Les équations différentielles du mouvement, qui relient au temps, les paramètres de position et leurs dérivées premières et secondes s'obtiennent en utilisant des combinaisons où n'interviennent pas les forces de liaison.

CHAPITRE XV

STATIQUE

---

100. Généralités. — La Statique a pour objet l'étude des conditions dans lesquelles un système matériel reste en repos ou, comme on dit, reste *en équilibre*.

Il est évident que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système matériel reste en équilibre est que chacun des points matériels du système reste en repos.*

Nous allons considérer le repos comme un cas particulier du mouvement. Nous retrouverons ainsi des théorèmes qui se démontrent directement dans les cours élémentaires.

101. Statique d'un point matériel. — Nous avons déjà considéré les conditions de l'équilibre d'un point matériel libre (n° 46). Rappelons que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point matériel libre reste en équilibre est que les forces appliquées forment un système équivalent à zèro.*

Comme les forces appliquées sont concourantes, on peut dire aussi que *pour l'équilibre d'un point matériel libre, il faut et il suffit que la résultante des forces appliquées soit nulle.*

Cette condition se traduit par les trois équations $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$.

Nous avons étudié l'équilibre d'un point matériel assujetti à glisser sur une courbe ou sur une surface (n°s 61, 68, 69).

Nous avons enfin donné la théorie de l'équilibre relatif d'un point matériel (n° 71). Rappelons que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point matériel reste en équilibre relatif est que le système de forces concourantes formé par les forces données et de liaison et la force d'inertie d'entraînement ait sa résultante nulle.*

D'ailleurs nous avons vu (n° 73) que pour étudier l'équilibre relatif d'un point par rapport à la Terre, on pouvait considérer la Terre comme immobile, pourvu que l'on remplace l'attraction de la Terre par le poids et que l'on ne

tienne pas compte de l'attraction des corps célestes. Autrement dit, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point matériel reste en équilibre relatif par rapport à la Terre est que le système des forces données (autres que la force due à l'attraction terrestre), des forces de liaison et du poids ait une résultante nulle.*

102. Condition universelle d'équilibre. — Soit un système de points matériels auxquels nous avons par la pensée rendu la liberté de la façon qui a été expliquée au nº 83. Supposons que ce système soit en équilibre. Tous les points matériels sont en équilibre et les forces appliquées à chacun des points matériels admettent une résultante nulle.

Il est facile de démontrer que le système formé par l'ensemble de toutes les forces extérieures et intérieures est équivalent à zéro. Pour cela il suffit de prouver que par des opérations élémentaires on peut arriver à supprimer toutes les forces ; or on réalise ce programme en supprimant successivement les forces appliquées aux différents points, ce qui revient à remplacer ces forces par leur résultante, qui est nulle (2ᵉ opération élémentaire, nº 10).

Le système des seules forces extérieures est manifestement aussi équivalent à zéro. En effet commençons par ajouter successivement à ce système les forces intérieures deux à deux égales et directement opposées (1ʳᵉ opération élémentaire); nous obtiendrons ainsi le système de toutes les forces, système que l'on peut réduire à zéro, comme nous venons de le montrer.

Nous pouvons alors énoncer une condition universelle nécessaire à l'équilibre d'un système : *Une condition nécessaire à l'équilibre d'un système matériel, déformable ou non, est que l'ensemble des forces extérieures appliquées au système soit équivalent à zéro.*

Il convient d'insister sur ce point qu'une portion quelconque d'un système peut être considérée comme formant un système pourvu que l'on prenne la précaution de tenir compte des forces exercées par les autres parties du système supposées supprimées.

La condition nécessaire à l'équilibre d'un système n'est pas en général suffisante.

Considérons par exemple une chaîne non tendue ; appliquons à ses extrémités deux forces égales et directement opposées ; bien que ces deux forces forment un système équivalent à zéro, elles ne laisseront pas la chaîne en repos.

Nous avons vu (nº 9) qu'un système équivalent à zéro admettait une résultante générale et un moment résultant nuls. Donc, *quand un système matériel est en équilibre, le système des forces extérieures appliquées au système admet une résultante générale et un moment résultant nuls.*

Ce théorème se traduit par six équations qui sont nécessaires, mais en général insuffisantes :

$$X_e = 0, \quad Y_e = 0, \quad Z_e = 0, \quad L_e = 0, \quad M_e = 0, \quad N_e = 0.$$

Il ne faut pas oublier dans les problèmes que parmi les forces extérieures il peut y avoir des forces de liaison.

Occupons-nous maintenant de l'équilibre relatif d'un système. Les forces appliquées à l'un quelconque des points matériels et la force d'inertie d'entraînement de ce point admettent une résultante nulle. On en déduit, comme précédemment, qu'*une condition nécessaire à l'équilibre relatif d'un système matériel, déformable ou non, est que l'ensemble des forces extérieures et des forces d'inertie d'entraînement soit équivalent à zéro.*

En particulier, *une condition nécessaire à l'équilibre relatif d'un système par rapport à la Terre est que le système formé par les forces extérieures (autres que celles dues à l'attraction terrestre) et par le poids total soit équivalent à zéro.*

103. Statique du corps solide. — Considérons un solide, c'est-à-dire un système de points matériels dont les distances mutuelles sont invariables. Nous allons démontrer que la condition universelle d'équilibre est suffisante.

Supposons en effet que le solide soit au repos à l'instant initial et que le système des forces extérieures données et de liaison soit équivalent à zéro.

Puisque la résultante générale des forces extérieures est nulle, le théorème du mouvement du centre de masse nous montre que le centre de masse se comporte comme un point matériel de masse M et qui, partant du repos, serait soumis à une force dont les projections sont nulles. On en conclut, comme au n° 46, que le centre de masse reste immobile.

Nous pouvons supposer que l'origine O des coordonnées a été choisie au centre de masse.

Puisque le moment résultant $\overrightarrow{OG}$ des forces extérieures par rapport au point O est nul, l'extrémité K du moment cinétique $\overrightarrow{OK}$ par rapport au point O a une vitesse $\overrightarrow{KV}$ constamment nulle (n° 86). Le point K reste donc en coïncidence avec sa position initiale qui est manifestement O (puisque, à l'instant initial, les vitesses sont nulles). Le moment cinétique reste donc nul. Mais le corps solide, ayant un point fixe O, ne peut *à chaque instant* que rester en repos ou tourner autour d'un axe passant par le point fixe (n° 29). Supposons qu'à un instant déterminé mais quelconque le solide tourne autour d'un axe passant par O avec une vitesse angulaire ω (cet axe de rotation pouvant changer d'orientation avec le temps). L'état des vitesses et par suite le moment cinétique seraient les mêmes à l'instant considéré que si le solide tournait

autour d'un axe *fixe* avec la vitesse angulaire ω ; mais alors le moment cinétique aurait pour valeur $I\omega$ (n° 87) ; puisque le moment cinétique est nul, il faut que ω soit nul, c'est-à-dire que le solide soit en repos à un instant quelconque. Le solide reste donc bien en repos.

Donc, *la condition universelle d'équilibre est à la fois nécessaire et suffisante pour un solide.*

Autrement dit, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un solide reste en équilibre est que le système des forces extérieures données et de liaison soit équivalent à zéro.*

104. Equilibre d'un solide mobile autour d'un axe fixe. — Considérons un corps solide assujetti à tourner autour d'un axe sans glisser le long de cet axe et restant en repos. D'après le théorème précédent, l'ensemble des forces extérieures données et de liaison est nul.

Mais étudions directement le problème. Nous avons trouvé (n° 92) pour équation différentielle du mouvement $I\frac{d\omega}{dt} = N$.

Si le solide est en repos, ω est nul et par suite $N = \Sigma N_e = 0$. Réciproquement si $\Sigma N_e = 0$ on aura $\frac{d\omega}{dt} = 0$. Par suite la vitesse angulaire ω sera constante ; elle sera donc nulle puisqu'elle est nulle à l'instant initial.

Donc, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un solide mobile autour d'un axe sans pouvoir glisser le long de cet axe reste en équilibre est que la somme des moments par rapport à l'axe des forces données extérieures soit nulle.*

Ce théorème se traduit par l'équation :

$$N = 0.$$

105. Equilibre d'un solide mobile autour d'un point fixe. — Considérons un corps solide assujetti à avoir un point fixe. Supposons que la liaison est réalisée de la manière suivante : le corps solide possède un *très petit* anneau qui s'engage sans frottement dans un *très petit* anneau fixe (à la façon de deux maillons successifs d'une chaîne).

L'anneau fixe exerce sur le solide une force de liaison appliquée à l'autre anneau. Autrement dit on peut supprimer la liaison en appliquant au point fixe une force de liaison convenablement choisie.

Puisque l'ensemble des forces extérieures données et de la force de liaison est équivalent à zéro, le moment résultant de ces forces par rapport au point fixe est nul ; mais le moment de la force de liaison par rapport au point fixe

est nul ; donc le moment résultant des forces extérieures données par rapport au point doit être nul.

En considérant le repos comme un cas particulier du mouvement, on peut démontrer que réciproquement si le moment résultant des forces extérieures données par rapport au point fixe est nul, le système reste en équilibre. Nous l'admettrons et nous énoncerons le théorème suivant : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un solide assujetti à avoir un point fixe reste en équilibre est que le moment résultant des forces extérieures données par rapport au point fixe soit nul.*

Ce théorème se traduit par les trois équations

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0,$$

si l'on choisit le point fixe pour origine des coordonnées.

Remarquons que les forces extérieures données admettent alors une résultante (nº 9) qui est égale et directement opposée à la force de liaison, puisque la résultante considérée et la force de liaison doivent s'équilibrer.

106. Equilibre d'un solide reposant sans frottement sur un plan fixe. — Considérons un corps solide en repos possédant un ou plusieurs points de contact, sans frottement, avec un plan fixe. Les forces de liaison sont appliquées aux différents points de contact ; elles sont normales au plan. Enfin elles sont dirigées toutes d'un même côté du plan, celui où se trouve le solide ; en effet, nous supposons que les liaisons sont unilatérales et empêchent seulement le solide de traverser le plan mais ne l'obligent pas à garder les contacts avec le plan ; certaines forces de liaison peuvent d'ailleurs être nulles.

Les forces de liaison admettent une résultante appliquée au centre des vecteurs parallèles qui les représentent (nº 12).

On appelle *polygone de sustentation* un polygone convexe dont les sommets sont des points d'appui et qui contient à son intérieur ou sur son contour tous les autres points d'appui.

Par exemple s'il y a trois points d'appui non alignés, le polygone de sustentation n'est autre que le triangle dont les sommets coïncident avec les points d'appui ; s'il y a quatre points d'appui, dont trois ne sont pas alignés, le polygone de sustentation est tantôt un triangle tantôt un quadrilatère.

Il est facile de voir que la résultante R des forces de liaison perce le plan à l'intérieur du polygone de sustentation. Considérons en effet un côté c du polygone de sustentation. Les forces de liaison qui sont appliquées en des points de ce côté c ont un moment nul par rapport à ce côté ; celles des autres forces de liaison qui ne sont pas nulles ont manifestement par rapport à ce côté des moments qui sont tous de même signe (ce n'est qu'exception-

nellement que toutes les autres forces de liaison seront nulles). Le moment de la résultante des forces de liaison par rapport au côté c doit être égal à la somme des moments des forces de liaison, somme d'éléments nuls et d'éléments de même signe. Le moment de la résultante a donc ce même signe et comme la résultante est dirigée dans le même sens que les composantes, elle doit percer le plan en un point situé dans le demi-plan limité par le côté c et contenant le polygone de sustentation. En appliquant cette propriété successivement à tous les côtés du polygone, on arrive à cette conclusion que la résultante R doit percer le plan à l'intérieur du polygone de sustentation.

Exceptionnellement il pourra arriver qu'elle perce le plan sur le contour du polygone.

Puisque le solide est en repos, l'ensemble des forces données et de la résultante R doit être équivalent à zéro ; il revient au même de dire que l'ensemble des forces données doit être équivalent à une force égale et directement opposée à R (n° 8, égalités symboliques).

Nous arrivons à la conclusion qu'il est nécessaire pour l'équilibre que les forces données admettent une résultante qui perce le plan à l'intérieur, ou exceptionnellement sur le contour, du polygone de sustentation. On peut démontrer, mais nous l'admettrons, que cette condition est suffisante. Donc, *la condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre d'un solide qui repose sans frottement sur un plan est que les forces données admettent une résultante qui perce le plan à l'intérieur ou sur le contour du polygone de sustentation.*

Supposons que le solide ait trois points d'appui ; on obtiendra les valeurs des trois forces de liaison en écrivant que le moment résultant des forces données et de liaison est nul par rapport aux trois côtés du triangle de sustentation.

Si le solide a plus de trois points d'appui, la statique seule ne permet pas de déterminer les forces de liaison.

107. Equilibre d'un fil tendu. — Considérons un fil de faible section et de poids négligeable tendu par deux forces F, F′ appliquées à ses extrémités AB (*fig.* 67). Le fil est un système déformable. Appliquons-lui la condition universelle d'équilibre. L'ensemble des deux forces doit être équivalent à zéro ; autrement dit les deux forces doivent être égales et directement opposées.

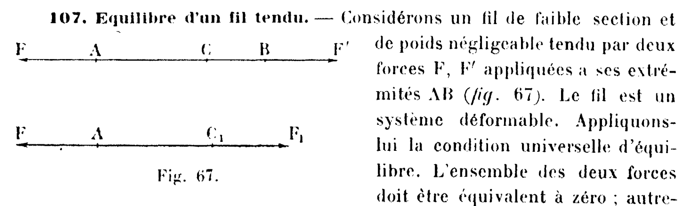


Fig. 67.

L'expérience montre que cette condition est suffisante si le fil est tendu

suivant le support commun aux deux forces. Coupons par la pensée le fil tendu suivant une section quelconque C, de façon à partager le fil en deux tronçons AC_1 et C_2B.

Le premier tronçon, AC_1, isolé par la pensée, est en équilibre sous l'action de la force F appliquée en A et des forces exercées par le deuxième tronçon ; ces dernières forces admettent donc une résultante F_1 égale et directement opposée à F. On voit de même que le deuxième tronçon est soumis à des forces exercées par le premier tronçon, forces admettant une résultante F_2 égale et directement opposée à F'. Les deux résultantes F_1 et F_2 sont égales et directement opposées, comme l'exige d'ailleurs le principe d'action et de réaction. Les forces F_1, F_2 ont même intensité que les forces F, F' ; cette intensité, appelée tension du fil, reste donc la même quelle que soit la position de la coupure C.

Si on coupe effectivement un fil tendu en équilibre, on doit, d'après ce qui précède, pour maintenir l'un quelconque des deux tronçons en équilibre, appliquer sur la lèvre correspondante de la coupure une force ayant pour support l'axe du fil, pour direction celle de l'extérieur du tronçon et pour intensité la tension du fil, c'est-à-dire l'intensité commune aux deux forces extérieures qui tendent le fil entier.

108. Théorème des travaux virtuels d'un point matériel libre. — Nous avons vu que la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre d'un point libre se traduit par les trois équations

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Si nous désignons par λ, μ, ν trois quantités arbitraires, on aura donc, pour un point en équilibre, $\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0$. Cette remarque peut se traduire d'une manière plus suggestive. Soit A la position d'équilibre du point matériel et soit A' un point infiniment voisin de A. Désignons par δx, δy, δz les projections infiniment petites du vecteur AA' ; adoptons précisément δx, δy, δz pour valeurs des quantités arbitraires λ, μ, ν. Nous aurons

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0.$$

Réciproquement, si cette dernière équation est satisfaite quelles que soient les valeurs infiniment petites de δx, δy, δz, on aura $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ et par suite le point sera dans une position d'équilibre.

L'expression $X\delta x + Y\delta z + Z\delta z$ est homogène à un travail ; c'est d'ailleurs le travail élémentaire qu'effectuerait la résultante des forces appliquées si le point matériel prenait le déplacement AA' ; aussi appelle-t-on cette expression *travail virtuel* de la résultante (le qualificatif *virtuel* indique qu'il

s'agit d'un travail dans un déplacement que l'on imagine) ; le déplacement infiniment petit imaginé AA′ s'appelle *déplacement virtuel*.

A chacune des forces données F_k appliquées au point matériel correspond un travail virtuel $X_k\delta x + Y_k\delta y + Z_k\delta z$. La somme des travaux virtuels de ces forces est égale au travail virtuel de la résultante (la démonstration du nº 40 s'applique aux travaux virtuels). Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre d'un point matériel libre est que la somme des travaux virtuels des forces appliquées soit nulle dans tout déplacement virtuel.

Ce théorème est rarement utilisé dans les problèmes ; il nous sera utile dans les démonstrations qui suivent.

109. Théorème des travaux virtuels pour un point matériel gêné. — Considérons un point matériel assujetti à rester sur une courbe ou sur une surface. Supposons que le point matériel soit en équilibre et qu'il n'y ait pas frottement. Libérons le point matériel, quitte à lui appliquer la force de liaison, qui est normale à la courbe ou à la surface. D'après le théorème précédent la somme des travaux virtuels des forces données et de liaison est nulle pour tout déplacement virtuel ; cette somme sera en particulier nulle pour tout déplacement virtuel compatible avec la liaison, c'est-à-dire pour un déplacement virtuel infiniment petit sur la courbe ou sur la surface.

Mais le travail virtuel de la force de liaison est nul dans un tel déplacement virtuel, car la force de liaison est normale à AA′. Par suite la somme des travaux virtuels des forces données doit être nulle ; réciproquement, s'il en est ainsi, la résultante des forces données est nulle ou normale à la courbe ou à la surface. Donc,

La condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre d'un point matériel soumis à une liaison sans frottement est que la somme des travaux virtuels des forces données soit nulle dans tout déplacement virtuel compatible avec la liaison.

Ce théorème n'est qu'un cas particulier du théorème général dont nous allons nous occuper.

110. Théorème général des travaux virtuels. — Considérons un système de points matériels en équilibre. Libérons ces points de leurs liaisons extérieures et intérieures, quitte à adjoindre des forces de liaison. Imaginons un déplacement virtuel pour chacun des points ; l'ensemble de ces déplacements virtuels s'appellera déplacement virtuel du système.

Puisque chacun des points est en équilibre, la somme des travaux vir-

tuels des forces données et de liaison appliquées à chaque point est nulle ; il en résulte que la somme des travaux virtuels de toutes les forces données et de liaison appliquées au système est nulle. Réciproquement, si la somme des travaux virtuels de toutes les forces est nulle dans tous les déplacements virtuels du système, cette somme sera nulle en particulier pour un déplacement virtuel qui respecte la position de tous les points matériels sauf un ; cela prouve que la résultante des forces appliquées à l'un quelconque des points matériels est nulle ; autrement dit chacun des points matériels est en équilibre et le système est par suite en équilibre. D'où le théorème général :

La condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre d'un système matériel, déformable ou non, est que la somme des travaux virtuels de toutes les forces données et de liaison soit nulle dans tout déplacement virtuel du système.

Ce théorème est rarement utilisé dans les problèmes.

Considérons maintenant un système matériel formé par un ensemble de solides assujettis à des liaisons extérieures bilatérales sans frottement. Par liaisons sans frottement nous entendons des liaisons telles que pendant le mouvement du système les forces de liaison ont un travail nul. Parmi les déplacements virtuels nous allons porter notre attention sur ceux qui sont compatibles avec les liaisons, c'est-à-dire ceux qui respectent les distances mutuelles des points matériels de chacun des solides et qui respectent les liaisons imposées aux solides. Conformément au théorème général, la somme des travaux virtuels de toutes les forces (c'est-à-dire des forces extérieures données, des forces intérieures données, des forces extérieures de liaison et des forces intérieures de liaison) est nulle. Mais pour les déplacements virtuels considérés, la somme des travaux virtuels des forces extérieures de liaison est nulle (car les déplacements virtuels considérés sont des déplacements possibles et si un de ces déplacements se produisait dans un mouvement du système la somme considérée serait nulle) et la somme des travaux virtuels des forces intérieures de liaison est nulle (car cette somme est nulle pour chacun des solides d'après le n° 89). Il en résulte que la somme des travaux virtuels de toutes les forces données est nulle. Nous admettrons que la réciproque est vraie et nous énoncerons le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre d'un système de solides assujettis à des liaisons bilatérales sans frottement est que la somme des travaux virtuels de toutes les forces données soit nulle pour tous les déplacements virtuels qui respectent les liaisons.

Ce théorème est très utile dans les problèmes usuels d'équilibre. Avant de l'appliquer on doit s'assurer que les liaisons sont sans frottement, c'est-à-dire que les forces de liaison ne peuvent pas travailler.

Dans ce qui précède nous avons rencontré les liaisons bilatérales suivantes qui sont réalisables sans frottement : 1° un corps solide a un point fixe (la force de liaison immobilisée ne travaille pas) ; 2° un corps solide a un axe fixe (les deux forces de liaison R′ et R″ du n° 92 sont appliquées à des points fixes et ne travaillent pas). Nous signalerons les deux autres cas suivants : 1° deux corps solides ont un point commun (nous supposons la liaison réalisée par un petit anneau solidaire du premier corps s'engageant dans un petit anneau solidaire du deuxième corps ; on a deux forces de liaison égales et directement opposées appliquées respectivement à l'un et à l'autre anneau ; les points d'application des deux forces coïncident et ont le même déplacement élémentaire ; par suite les travaux élémentaires des deux forces sont égaux et de signes contraires et ont une somme nulle) ; 2° deux corps ont une droite commune (nous supposerons la liaison réalisée comme au n° 92 ; on a à considérer deux forces de liaison égales et opposées appliquées aux anneaux et deux forces de liaison égales et opposées appliquées aux deux parties du manchon ; on voit aisément, comme dans le cas précédent, que la somme des travaux élémentaires des quatre forces de liaison est nulle).

Donnons deux exemples de problèmes qui se résolvent simplement par le procédé des travaux virtuels.

Considérons d'abord une vis mobile sans frottement dans un écrou fixe et en équilibre sous l'action d'un couple de moment C par rapport à l'axe et d'une force longitudinale F. Nous supposons les sens de C et de F tels que si C était seul et positif, la vis se visserait dans l'écrou et que si F était seul et positif la vis se dévisserait dans l'écrou. Imaginons un déplacement virtuel qui ferait progresser la vis de δz et la ferait tourner de $\delta\theta$. La somme des travaux virtuels des forces données appliquées à la vis est $C\delta\theta - F\delta z$; cette somme est nulle d'après la théorie des travaux virtuels ; d'ailleurs si p désigne le pas on a $\frac{\delta z}{p} = \frac{\delta\theta}{2\pi}$, puisque la progression est proportionnelle à l'angle de rotation. Nous avons donc

$$\left(\frac{2\pi C}{p} - F\right)\delta z = 0.$$

D'où, la condition d'équilibre

$$F = \frac{2\pi C}{p}.$$

Considérons maintenant un corps solide assujetti à tourner autour d'un axe fixe Oz et à glisser le long de cet axe. Désignons par N le moment résultant des forces données par rapport à l'axe et par Z la somme des projections des forces données sur l'axe.

Donnons au solide un déplacement virtuel compatible avec les liaisons. Désignons par δz la progression du solide suivant l'axe (δz est la longueur du segment décrit par un point du solide situé sur l'axe) et par $\delta\theta$ l'angle de rotation du solide ($\delta\theta$ est l'angle dont tourne un plan solidaire du solide et passant par l'axe). Il est facile de voir que la somme des travaux virtuels des forces données est $N\delta\theta + Z\delta z$. En effet, le travail *élémentaire* d'une force est indépendant du chemin infiniment petit que décrit son point d'application de la position initiale à la position finale (ce travail élémentaire a en effet pour valeur $Xdx + Ydy + Zdz$ et ne dépend par suite que de dx, dy, dz). Le déplacement virtuel qui consisterait en une rotation $\delta\theta$ sans glissement suivie d'une translation δz dans la direction de l'axe donnerait aux différents points du solide leur position finale ; le travail virtuel de chaque force appliquée au solide serait donc le même que pour le déplacement virtuel primitivement envisagé : on en conclut que la somme des travaux virtuels des forces données est, pour le déplacement virtuel primitivement envisagé, égale à la somme $N\delta\theta + Z\delta z$.

La condition nécessaire et suffisante de l'équilibre est que l'on ait, pour toutes les valeurs de $\delta\theta$ et δz,

$$N\delta\theta + Z\delta z = 0.$$

Il faut donc et il suffit que l'on ait $N = 0$ et $Z = 0$.

111. Etude du mouvement d'un système par la méthode de d'Alembert. — Nous avons déjà remarqué au n° 46 que les forces appliquées à un point matériel et la force d'inertie $-m\vec{J}$ forment un système de vecteurs équivalent à zéro.

Considérons un système de points matériels que nous libérons en appliquant les forces de liaison extérieures et intérieures. L'ensemble de toutes les forces données et de liaison et des forces d'inertie forme un système équivalent à zéro. On peut en effet réduire un tel système à zéro par les opérations élémentaires qui consistent à supprimer les forces appliquées à chaque point matériel et sa force d'inertie (ce qui revient à remplacer ces forces par leur résultante nulle).

En remarquant que les forces intérieures, deux à deux égales et opposées, peuvent être supprimées par des opérations élémentaires, nous arrivons à cette proposition que *l'ensemble des forces extérieures données et de liaison et des forces d'inertie appliquées à un système matériel forme un système équivalent à zéro.*

Si l'on écrit l'équivalence à zéro du système considéré, on retrouve le théorème des projections des quantités de mouvement et le théorème des

moments des quantités de mouvement. Mais la proposition que nous venons d'énoncer et qui est due à *d'Alembert* a précisément pour intérêt qu'elle conduit tout naturellement à ces théorèmes généraux. D'ailleurs la proposition de d'Alembert est souvent d'application directe commode dans les cas simples.

Comme exemple d'application de la méthode de d'Alembert, imaginons un système matériel de masse négligeable. On pourra négliger les forces d'inertie de ce système. On arrive donc à cette conclusion que *l'ensemble des forces extérieures appliquées à un système en mouvement de masse négligeable forme un système équivalent à zéro.*

Dans un système matériel il intervient parfois un fil (ou un câble) ou un ressort de masse négligeable. L'ensemble des forces extérieures appliquées au fil ou à une portion du fil forme un système équivalent à zéro. Le fil en mouvement se comporte comme s'il était en repos. On en conclut que dans une portion rectiligne de fil dont les éléments ne sont soumis à aucune force extérieure (n° 106), la tension reste constante.

CHAPITRE XVI

NOTIONS SUR LES CHOCS ET PERCUSSIONS

112. Chocs. — On dit qu'un corps subit un choc lorsqu'il rencontre un obstacle fixe ou un autre corps en mouvement.

Par exemple une bille de billard qui rebondit sur une bande subit un choc de la part de cette bande ; deux navires qui s'abordent subissent un choc.

La durée d'un choc est extrêmement faible ; aussi peut-on raisonner comme si pendant un choc les points matériels des corps en présence ne se déplaçaient pas ; cela revient à négliger des déplacements très petits.

Un choc a pour conséquence de modifier l'état des vitesses ; celles-ci changent brusquement d'intensité et souvent même de direction ; pendant le choc les accélérations sont donc considérables ; cela exige la mise en jeu de forces très intenses et fugitives, que l'on appelle *forces instantanées*.

113. Impulsions. — Etant donnée une force de projections X, Y, Z on appelle impulsion de la force pendant un intervalle de temps t_0t_1 un vecteur $\vec{\mathcal{L}}$ de projections

$$\mathcal{L}_x = \int_{t_0}^{t_1} X dt, \qquad \mathcal{L}_y = \int_{t_0}^{t_1} Y dt, \qquad \mathcal{L}_z = \int_{t_0}^{t_1} Z dt.$$

114. Percussions. — Lorsque l'intervalle de temps t_0t_1 est très petit, le vecteur impulsion relatif à une force est en général peu intense. Ce vecteur ne peut être très intense que si la force est en moyenne très grande ; s'il en est ainsi l'impulsion prend le nom de percussion.

Pendant un choc interviennent des forces instantanées qui ont pendant la durée du choc une impulsion très grande tandis que les autres forces (pesanteur, attractions, etc) ont des impulsions tellement faibles qu'elles sont négligeables. Donc pendant un choc les seules impulsions appréciables sont celles dues aux forces instantanées, impulsions que l'on appelle alors percussions.

115. Choc d'un point matériel. — Nous avons remarqué au n° **47** que les équations fondamentales du mouvement d'un point matériel pouvaient s'écrire

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) = X, \qquad \frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right) = Y, \qquad \frac{d}{dt}\left(m\frac{dz}{dt}\right) = Z,$$

c'est-à-dire

$$d\left(m\frac{dx}{dt}\right) = Xdt, \qquad d\left(m\frac{dy}{dt}\right) = Ydt, \qquad d\left(m\frac{dz}{dt}\right) = Zdt.$$

En intégrant pendant un intervalle de temps t_0t_1 et en désignant par u_0, v_0, w_0, u_1, v_1, w_1 les valeurs initiales et finales des projections $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ du vecteur vitesse, nous obtenons

$$\left\{\begin{aligned} mu_1 - mu_0 &= \int_{t_0}^{t_1} Xdt, \\ mv_1 - mv_0 &= \int_{t_0}^{t_1} Ydt, \\ mw_1 - mw_0 &= \int_{t_0}^{t_1} Zdt. \end{aligned}\right.$$

Ces équations expriment que la variation géométrique du vecteur quantité de mouvement est égale au vecteur impulsion de la résultante des forces.

Appliquons ce théorème à un point matériel qui subit un choc pendant l'intervalle de temps très petit t_0t_1. Il résulte immédiatement de la définition d'une impulsion, que l'impulsion de la résultante des forces est la somme géométrique des impulsions des forces. Mais les impulsions des forces peu intenses sont négligeables. Nous avons donc le théorème suivant :

Quand un point matériel subit un choc, la variation géométrique de la quantité de mouvement est égale à la résultante des percussions.

En désignant par $\mathfrak{L}_x$, $\mathfrak{L}_y$, $\mathfrak{L}_z$ les projections de la résultante des percussions on a

$$(1) \qquad mu_1 - mu_0 = \mathfrak{L}_x, \qquad mv_1 - mv_0 = \mathfrak{L}_y, \qquad mw_1 - mw_0 = \mathfrak{L}_z.$$

116. Théorème du mouvement du centre de masse ou théorème des projections des quantités de mouvement d'un système matériel subissant un choc. — Considérons un système matériel qui subit un choc de durée t_0t_1. On a à chaque instant du choc (équations 3bis du chapitre XII)

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\frac{dx}{dt} = \Sigma X_e \qquad \text{ou} \qquad d\Sigma mu = \Sigma X_e,$$

d'où, en intégrant,

$$\Sigma mu_1 - \Sigma mu_0 = \Sigma \int_{t_0}^{t_1} X_e dt.$$

On a de même

$$\Sigma m v_1 - \Sigma m v_0 = \Sigma \int_{t_0}^{t_1} Y_e dt,$$

$$\Sigma m w_1 - \Sigma m w_0 = \Sigma \int_{t_0}^{t_1} Z_e dt.$$

On peut donc énoncer le théorème :

La variation de la somme des projections des quantités de mouvement sur un axe fixe est égale à la somme des projections des percussions extérieures sur cet axe.

Remarquons que

$$\Sigma m u = \Sigma m \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \Sigma m x = \mathrm{M} \frac{d\xi}{dt}.$$

L'équation $\Sigma m u_1 - \Sigma m u_0 = \Sigma \int_{t_0}^{t_1} X_e dt$ peut donc s'écrire

$$\mathrm{M}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_1 - \mathrm{M}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0 = \Sigma \int_{t_0}^{t_1} X_e dt.$$

On peut dire que :

Pendant un choc, le centre de masse d'un système se comporte comme un point matériel où serait concentrée la masse totale du système et qui serait soumis à la somme géométrique des percussions extérieures.

117. Théorème du moment cinétique d'un système subissant un choc. — Pendant chaque instant d'un choc subi par un système matériel on a (équations 4 du chapitre XII)

$$\frac{d}{dt} \Sigma m\left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}\right) = \Sigma \mathrm{L}_e \qquad \text{ou} \qquad d\Sigma[y(mw) - z(mv)] = \Sigma \mathrm{L}_e dt,$$

d'où, en intégrant entre les limites t_0 et t_1 du choc,

$$\Sigma[y(mw_1) - z(mv_1)] - \Sigma[y(mw_0) - z(mv_0)] = \Sigma \int \mathrm{L}_e dt.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

La variation du moment cinétique par rapport à un axe fixe est égale au moment résultant des percussions extérieures par rapport à cet axe.

118. Pendule balistique. — Considérons un pendule composé au repos. Supposons qu'un petit projectile de masse m se déplace dans un plan perpendiculaire à l'axe de suspension du pendule et vienne frapper le pendule à la distance r de l'axe, à un instant où son vecteur vitesse v_0 est à une distance h de l'axe. Proposons-nous de trouver la vitesse angulaire ω du pendule aussitôt après le choc, en supposant que le projectile soit venu s'incruster dans le pendule.

Appliquons le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe du pendule à l'ensemble du pendule et du projectile. Nous aurons, en remarquant que le choc ne donne lieu qu'à deux percussions égales et directement opposées et à des percussions de liaison,

$$(I + mr^2)\omega - mhv_0 = 0,$$

d'où

$$\omega = \frac{mhv_0}{I + mr^2}.$$

Remarquons que l'on a inversement

$$v_0 = \frac{I + mr^2}{mh} \cdot \omega.$$

De la mesure expérimentale de ω on peut donc déduire la valeur numérique de la vitesse v_0. C'est ainsi qu'autrefois on déterminait la vitesse d'un projectile en l'envoyant s'incruster dans un pendule appelé pendule balistique.

Remarque. — Il est facile de vérifier que le choc diminue l'énergie cinétique de l'ensemble. L'expérience montre d'ailleurs que l'énergie cinétique ainsi dissipée se transforme en chaleur, conformément au principe de la conservation de l'énergie.

119. Problèmes sur les chocs. — Il arrive fréquemment que les théorèmes généraux que nous avons établis aux n° 102, 103, 104 sont insuffisants pour résoudre un problème, c'est-à-dire pour fournir l'état des vitesses après le choc, connaissant l'état des vitesses avant le choc. Mais les renseignements fournis par ces théorèmes généraux sont néanmoins toujours précieux.

Nous sortirions du cadre de ce livre en expliquant comment on peut compléter ces renseignements de façon à pouvoir résoudre, d'une façon suffisamment approchée, tous les problèmes de chocs.

APPENDICE

Nota bene. — Le présent appendice n'est pas un résumé ; il ne renferme que les formules et les propositions sur lesquelles il est bon d'insister.

Chapitre I. — Théorie des vecteurs.

$$L = yZ - zY, \qquad M = zX - xZ, \qquad N = xY - yX.$$

$$L' = (y - y_0)Z - (z - z_0)Y, \qquad M' = (z - z_0)X - (x - x_0)Z,$$

$$N' = (x - x_0)Y - (y - y_0)X.$$

Somme géométrique :

$$X = \Sigma X_k, \qquad Y = \Sigma Y_k, \qquad Z = \Sigma Z_k.$$

La somme géométrique est un vecteur libre.

Moment résultant par rapport a l'origine :

$$L = \Sigma L_k, \qquad M = \Sigma M_k, \qquad N = \Sigma N_k.$$

Systèmes équivalents :

$$X' = X, \qquad Y' = Y, \qquad Z' = Z, \qquad L' = L, \qquad M' = M, \qquad N' = N.$$

Couples : *Le moment d'un couple est un vecteur libre.*

Centre de vecteurs parallèles :

$$\xi = \frac{\Sigma F_k x_k}{\Sigma F_k}, \qquad \eta = \frac{\Sigma F_k y_k}{\Sigma F_k}, \qquad \zeta = \frac{\Sigma F_k z_k}{\Sigma F_k}.$$

Chapitre II. — Cinématique du point. Vitesse.

Vecteur vitesse : symbole $\overrightarrow{V}$, intensité v.

$$v = \frac{ds}{dt}, \qquad v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \qquad v_p = \frac{r\,d\theta}{dt}.$$

Chapitre III. — Accélération.

VECTEUR ACCÉLÉRATION : symbole $\vec{J}$, intensité γ.

$$\gamma_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \gamma_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad \gamma_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

$$\gamma_t = \frac{dv}{dt}, \qquad \gamma_n = \frac{v^2}{\rho}, \qquad \gamma_b = 0.$$

$$\gamma_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \qquad \gamma_p = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right).$$

Chapitre IV. — Cinématique des systèmes invariables.

TRANSLATION : *La vitesse et l'accélération, dans une translation, sont des vecteurs libres.*

ROTATION : *La vitesse angulaire* ω, *dans une rotation, est un vecteur glissant.*

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \qquad v = \omega r.$$

CORPS SOLIDE AYANT UN POINT FIXE : *Un solide ayant un point fixe est animé à chaque instant d'une rotation.*

$$\left\{\begin{array}{lll} \omega_x = p, & \omega_y = q, & \omega_z = r, \\ v_x = qz - ry, & v_y = rx - pz, & v_z = py - qx. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll} \omega_{x_1} = p_1, & \omega_{y_1} = q_1, & \omega_{z_1} = r_1, \\ v_{x_1} = q_1z - r_1y, & v_{y_1} = r_1x - p_1z, & v_{z_1} = p_1y - q_1x. \end{array}\right.$$

Chapitre V. — Composition des mouvements.

COMPOSITION DES VITESSES : $\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r.$

COMPOSITION DES ACCÉLÉRATIONS :

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{J}_a = \vec{J}_e + \vec{J}_r + \vec{J}_c. \\ \vec{J}_c = 2\mathfrak{M}^t_{(V_r)}(\overrightarrow{A\omega}). \end{array}\right.$$

(J_c est le double du vecteur vitesse qu'aurait le point V_r dans la rotation $\overrightarrow{A\omega}$.)

Chapitre VI. — Principes de la dynamique. Travail.

ÉGALITÉ FONDAMENTALE : $\vec{F} = m\vec{J}$.

TRAVAIL ÉLÉMENTAIRE : $d\mathcal{C} = Xdx + Ydy + Zdz$.

FONCTION DE FORCES U :

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}, \qquad d\mathcal{C} = dU.$$

Chapitre VII. — Dynamique du point matériel. Théorèmes généraux.

FORCE D'INERTIE : *Les forces appliquées à un point matériel et la force d'inertie* — $m\vec{J}$ *forment un système dont la résultante est nulle.*

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

THÉORÈME DES AIRES : Si on a $N = 0$, on a $r^2\frac{d\theta}{dt} = C$, ou $\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2}$.

THÉORÈME DES FORCES VIVES :

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = d\mathcal{C},$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \mathcal{C}_{t_0}^t,$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - U = C^{te}.$$

Chapitre VIII. — Problèmes de la dynamique du point matériel libre.

MOUVEMENT DÛ A UNE FORCE CENTRALE :

$$m\gamma_r = F, \qquad r^2\frac{d\theta}{dt} = C.$$

Chapitre IX. — Équilibre et mouvement d'un point matériel soumis à des liaisons.

ÉQUATION DU MOUVEMENT DU PENDULE SIMPLE :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta.$$

Durée des petites oscillations doubles du pendule simple :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Force de frottement en repos : $T \leqslant fN$.

Force de frottement en mouvement :

$$T = f'N.$$

Chapitre X. — Mouvements relatifs d'un point matériel.

Théorème : *On peut considérer le trièdre mobile comme s'il était fixe à condition d'adjoindre la force d'inertie d'entraînement* $-m\vec{J}_e$ *et la force de Coriolis* $-m\vec{J}_c$.

Remarque : *La force de Coriolis est notamment nulle si le mouvement d'entraînement est une translation ou si la vitesse relative est nulle.*

Chapitre XI. — Centre de masse. Moments d'inertie.

Coordonnées du centre de masse G :

$$M\xi = \Sigma mx, \qquad M\eta = \Sigma my, \qquad M\zeta = \Sigma mz.$$

Moment d'inertie I : $I = \Sigma mr^2$.

Rayon de gyration K : $I = MK^2$.

Théorème du transport parallèle :

$$I_D = I_G + Md^2.$$

Ellipsoïde d'inertie :

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EZX - 2FXY = 1$$

avec $A = \Sigma m(y^2 + z^2)$, $B = \Sigma m(z^2 + x^2)$, $C = \Sigma m(x^2 + y^2)$,
$D = \Sigma myz$, $E = \Sigma mzx$, $F = \Sigma mxy$.

Chapitre XII. — Dynamique des systèmes. Théorèmes généraux.

Théorème du mouvement du centre de masse :

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma X_e, \qquad M\frac{d^2\eta}{dt^2} = \Sigma Y_e, \qquad M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Sigma Z_e.$$

En abrégé : $M . \vec{GJ} = \vec{OR}$.

Théorème des moments cinétiques :

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=\Sigma L_e,\qquad \frac{d}{dt}\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=\Sigma M_e,$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\Sigma N_e.$$

En abrégé : $\vec{KV}=\vec{OG}$.

Théorème des aires totales : Si $N=0$, on a $\Sigma mr^2\frac{d\theta}{dt}=C$, ou $\frac{d}{dt}\Sigma mA=\frac{C}{2}$.

Théorème des forces vives :

$$d\sum\frac{1}{2}mv^2=\Sigma d\mathcal{G}.$$

$$\sum\frac{1}{2}mv^2-\sum\frac{1}{2}mv_0^2=\Sigma\mathcal{G}_{t_0}^{t}.$$

$$\sum\frac{1}{2}mv^2-U=C^{te}.$$

Repère de Koenig : *Le théorème des moments cinétiques et le théorème des forces vives s'appliquent dans le mouvement relatif par rapport au repère de Kœnig.*

Chapitre XIII. — Mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe.

Vitesse angulaire : $\omega=\frac{d\alpha}{dt}=\frac{d\theta}{dt}$.

Moment cinétique par rapport a l'axe fixe :

$$I\frac{d\omega}{dt}.$$

Énergie cinétique : $\frac{1}{2}I\omega^2$.

Équation du mouvement : $I\frac{d^2\alpha}{dt^2}=N$.

Équation du mouvement du pendule composé :

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2}=-Mga\sin\alpha.$$

Chapitre XIV. — Problèmes sur le mouvement des systèmes.

Conseils : On commence par choisir les paramètres de position. Ensuite on applique les théorèmes généraux à l'ensemble du système ou aux différentes parties du système.

Chapitre XV. — Statique.

CONDITION UNIVERSELLE D'ÉQUILIBRE :

$$X_e = 0, \quad Y_e = 0, \quad Z_e = 0, \quad L_e = 0, \quad M_e = 0, \quad N_e = 0.$$

En abrégé : $\overrightarrow{OR} = 0, \quad \overrightarrow{OG} = 0.$

ÉQUILIBRE D'UN FIL RECTILIGNE TENDU PAR DEUX FORCES APPLIQUÉES AUX EXTRÉMITÉS.

THÉORÈME : *La tension est la même en tous les points du fil.*

THÉORÈME DES TRAVAUX VIRTUELS : *La condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre d'un système de solides assujettis à des liaisons bilatérales sans frottement est que la somme des travaux virtuels de toutes les forces données soit nulle pour tous les déplacements virtuels respectant les liaisons.*

MÉTHODE DE D'ALEMBERT : *L'ensemble des forces extérieures et des forces d'inertie d'un système matériel forme un système de vecteurs équivalent à zéro.*

Chapitre XVI. — Chocs et percussions.

PROJECTIONS D'UNE PERCUSSION :

$$\mathfrak{L}_x = \int_{t_0}^{t_1} X dt, \qquad \mathfrak{L}_y = \int_{t_0}^{t_1} Y dt, \qquad \mathfrak{L}_z = \int_{t_0}^{t_1} Z dt.$$

THÉORÈME DU MOUVEMENT DU CENTRE DE MASSE.

Équation de projection sur Ox :

$$M\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_1 - M\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0 = \Sigma \int_{t_0}^{t_1} X_e dt.$$

THÉORÈME DES MOMENTS CINÉTIQUES : La variation du moment cinétique par rapport à un axe fixe est égale au moment résultant des percussions extérieures par rapport à cet axe.

Équation relative à Ox :

$$\left[\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)\right]_1 - \left[\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)\right]_0 = \Sigma \int_{t_0}^{t_1} L_e dt.$$

EXERCICES

Vecteurs.

(Chapitre I.)

1. On donne un parallélépipède rectangle construit sur trois arêtes OA = 3, OB = 4, OC = 5 prises comme axes de coordonnées Ox, Oy, Oz ; on considère les deux vecteurs représentés par les diagonales $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ de deux faces opposées. Former la réduction au point O de ce système de deux vecteurs et déterminer l'axe central.

On partage les diagonales AB et CD en parties égales infiniment petites HH′, KK′ égales à ds, s désignant les distances égales AH et CK ; on porte sur HK un vecteur issu de H et égal à HK . ds ; former la réduction au point O de ce système de vecteurs et déterminer l'axe central. Déterminer le moment résultant du système par rapport aux sommets du parallélépipède (*fig.* 68).

Fig. 68.

2. Quelle est en joules la valeur du moment d'un couple formé de deux forces d'une tonne distantes de 50 centimètres ?

3. Étudier un système de huit forces représentées par les huit arêtes d'un tétraèdre régulier ; considérer les différents cas possibles en donnant aux forces leurs deux orientations.

4. Un réservoir rempli d'eau est fermé par une paroi verticale ayant la forme d'un triangle isocèle de base supérieure horizontale b et de hauteur h. Trouver la résultante des pressions exercées par le liquide sur la paroi et le point d'application de cette résultante. On sait que la force pressante exercée sur un petit élément de paroi est égale au poids d'une colonne de liquide ayant pour base cet élément et pour hauteur la distance du centre de l'élément à la surface libre horizontale du liquide.

Cinématique.

(Chapitres II à V.)

5. Étudier le mouvement défini par les équations

$$x = t^3 - 3t, \qquad y = -3t^2, \qquad z = c(t^3 + 3t),$$

c étant une constante.

6. Un train partant de A sans vitesse a une accélération constante $\gamma = 0,7$; à un certain moment on supprime l'admission de la vapeur et le train ralentit avec une accélération constante $\gamma = -0,06$, puis s'arrête en B à 500 mètres du point A. Les unités adoptées sont le mètre et la seconde. On demande de trouver la durée des deux phases du mouvement et de construire le diagramme de la vitesse et le diagramme de l'espace.

7. Un volant de rayon $R = 2$ mètres a un mouvement uniformément retardé ; à l'origine du temps sa vitesse est de 300 tours par minute ; au bout de quatre secondes sa vitesse n'est plus que de 240 tours par minute. Trouver la loi du mouvement angulaire. Calculer le nombre de tours effectués jusqu'à l'arrêt. Déterminer l'accélération d'un point A de la jante à l'instant $t = 18$ secondes et construire l'hodographe de ce point A.

8. Un mobile tombe dans un liquide sans vitesse initiale ; la résistance à l'avancement est telle que l'on a $\gamma = g - 4v$(mètre, seconde), v étant la vitesse, γ étant l'accélération, g étant l'accélération due à la pesanteur. Trouver la loi de la vitesse et la loi de l'espace. Calculer la vitesse et l'espace parcouru à l'instant $t = 4$ secondes. Déterminer la limite de la vitesse.

9. Construire les courbes représentatives du mouvement vertical suivant : 1° élévation d'un mouvement uniformément varié, sans vitesse initiale, pendant 6 secondes, sur un parcours de 6 mètres ; 2° élévation d'un mouvement uniformément retardé pendant 6 secondes, sur un parcours de 6 mètres avec vitesse finale nulle ; 3° deux périodes de six secondes chacune symétriques des premieres au cours desquelles le mobile redescend à sa position initiale. Tracer une came produisant ce mouvement vertical (n° 34) en tournant d'un mouvement uniforme et en faisant un tour en 24 secondes.

10. Un tramway parcourt une longueur de 800 mètres de la façon suivante : 1° mouvement accéléré pendant 20 secondes avec vitesse initiale nulle et accélération $\gamma = A \sin \frac{\pi t}{20}$; 2° mouvement uniforme à la vitesse de $10 \frac{\text{mètres}}{\text{sec}}$; 3° mouvement retardé d'accélération $-A \sin \frac{\pi t}{20}$, avec vitesse finale nulle. Déterminer la constante A, sachant que la vitesse n'a pas de variation brusque. Trouver la loi du mouvement et de la vitesse pendant les trois périodes ; calculer les durées et les chemins parcourus.

11. Étudier les lois de la vitesse et de l'accélération du piston C d'une machine à vapeur, en supposant que l'arbre O qui porte la manivelle OA et

entraîne la bielle AB est animé d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire ω (*fig.* 69). On posera $OA = r$, $AB = l$; on étudiera le cas général, puis le cas où le rapport $\frac{r}{l}$ est petit.

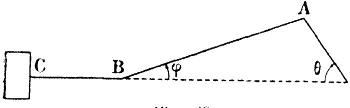


Fig. 69.

12. Un corps solide est animé d'un mouvement hélicoïdal dont la vitesse de rotation autour de Oz est $\omega = 2 \frac{\text{radians}}{\text{s}}$ et dont la vitesse de translation parallèle à Oz est $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Déterminer les points du solide qui à un instant donné ont leur vitesse passant par un point d'abscisse 6^m et parmi ces points déterminer ceux qui ont une vitesse de $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; quelle est leur accélération ?

13. Un mobile part d'un point O avec une vitesse initiale inconnue ; il est animé d'un mouvement à accélération constante ; un observateur placé à 10 mètres au-dessus du point O voit passer le mobile aux instants $t_1 = 1$ s, $t_2 = 5$ s ; calculer la vitesse initiale et l'accélération.

14. Un mobile A se déplace sur l'axe Ox d'un mouvement donné ; la droite qui joint le point A à un point fixe C, de coordonnées $x_0 = -1$ mètre, $y_0 = +1$ mètre, rencontre l'axe Oy en un point B ; déterminer l'équation du mouvement du point B et calculer sa vitesse en fonction de la vitesse du point A.

15. Un point décrit la spirale $r = ae^{k\theta}$ de telle façon que sa vitesse v satisfasse à $v = \frac{b^2}{r}$. Étudier la vitesse aréolaire et l'accélération ; déterminer l'hodographe.

16. Une barre AB de longueur $2R = 10^{cm}$ se déplace de façon que le point B décrive une circonférence de rayon $R = 5^{cm}$ et de centre C, le mouvement circulaire étant uniforme avec la vitesse angulaire $\omega = 2$. La barre glisse sur un point O de la circonférence. Trouver la vitesse du point A quand le point B s'est déplacé de 120°. Construire la base et la roulante (n° 32).

17. Etudier le mouvement, la vitesse et l'accélération des points d'un plan mobile qui glisse sur un plan fixe de telle manière qu'une circonférence du plan mobile roule sans glisser sur une droite du plan fixe. On supposera d'abord que le point géométrique de contact de la circonférence avec la droite a une vitesse uniforme ; on supposera ensuite que ce point a un mouvement quelconque mais connu.

18. Un mobile décrit d'un mouvement uniformément varié une droite tracée sur un plan qui glisse sur lui-même en tournant d'un mouvement uniforme autour d'un point fixe. Etudier le mouvement, la vitesse et l'accélération du mobile.

19. Combien de temps mettra au minimum un nageur pour traverser une rivière de 30 mètres de large, sachant que le courant a une vitesse de 1 mètre

à la seconde et que le nageur ne peut pas dépasser en eau calme la vitesse de $4 \frac{\text{km}}{\text{heure}}$?

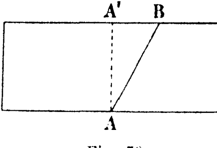


Fig. 70.

20. Un wagon de $2^m,50$ de largeur se déplace avec une vitesse de 90 km/heure. Un projectile lancé horizontalement dans une direction faisant un angle de 60° avec les rails pénètre en A et sort en B, tel que A'B = 1,2 mètre (*fig.* 70). Calculer la vitesse du projectile.

21. On donne un cercle tangent en O à l'axe Ox (*fig.* 71) et de diamètre h ; une barre rectiligne CBA tourne autour du point C diamétralement opposé à O ; elle rencontre Ox en A et le cercle en B. On suppose que le point géométrique A se déplace sur Ox avec une vitesse constante v_0. Déterminer le mouvement du point géométrique B, sa vitesse, son hodographe et son accélération.

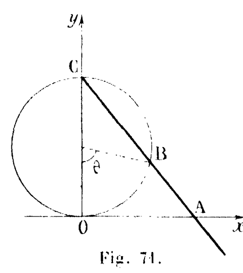


Fig. 71.

22. Un avion a dans l'atmosphère en repos une vitesse de 135 $\frac{\text{km}}{\text{heure}}$; on suppose que le vent souffle de l'ouest à l'est avec une vitesse de 22,5 mètres par seconde. Quelle direction l'avion doit-il prendre pour que sa trajectoire absolue ait la direction du nord-est et quelle est alors sa vitesse par rapport à la terre ?

23. Autour d'un point O fixe tourne dans le plan xOy une droite D d'un mouvement dont la vitesse angulaire est constamment égale à $2 \frac{\text{radians}}{\text{s}}$. Sur cette droite D se meut un mobile A avec un mouvement relatif inconnu. Déterminer la loi du mouvement relatif de façon que la vitesse absolue du mobile soit constamment égale à $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Trouver la trajectoire absolue du mobile et son accélération, en supposant qu'à l'instant initial le mobile est sur l'axe Ox à la distance $r_0 = 1$ mètre du point O.

Dynamique du point.

(Chapitres VIII, IX, X.)

24. Quelle force faut-il appliquer à un point matériel qui pèse deux grammes pour lui donner une accélération de $2 \frac{\text{km}}{\text{heure}^2}$, en un lieu où l'accélération de la pesanteur est de $9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$?

25. Quelle est en chevaux-vapeur la puissance d'une machine qui fournit un travail de 10 000 joules à l'heure ?

26. Un point pesant est attiré par une droite proportionnellement à une puissance de la distance du point à la droite. Montrer qu'il y a une fonction des forces. Etudier les surfaces de niveau, en supposant la droite verticale.

27. Un point matériel pesant se déplace sur la verticale avec la résistance R proportionnelle au carré de la vitesse $R = mg\frac{v^2}{k^2}$. On le lance d'abord vers le haut avec la vitesse initiale $v_0 = -a$. Trouver le point le plus élevé atteint et le temps mis à l'ascension. Le mobile redescend ensuite. On admettra que k est très grand, de façon qu'on puisse négliger k^p si $p > 2$. Application numérique : $g = 980$, $k = 9{,}8 \times 10^5$; on calculera le temps mis à l'ascension et le temps mis pour revenir au point de départ.

28. Mouvement vertical d'un point pesant de poids P dans un milieu résistant, la résistance R étant proportionnelle au carré de la vitesse. Application numérique : $|R| = \frac{Pv^2}{25}$; on déterminera la vitesse limite de chute ; on calculera le temps que met le mobile en descendant pour accroître sa vitesse de zéro à $4{,}9\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$; on cherchera la hauteur à laquelle s'élève le mobile quand on le lance avec une vitesse initiale égale à $5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

29. Un canon OA a un diamètre de 75^{mm} et une longueur l de 3 mètres ; un projectile de poids égal à 8^{kg} est soumis à la pression des gaz produits par la combustion de la poudre ; on suppose que la pression résultante est fournie par la formule $F = k\sqrt{x}(l - x)$, x désignant la distance du projectile à l'origine O du canon. On sait que le projectile au sortir du canon a une vitesse de $500\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Calculer le coefficient k et en déduire le maximum de la pression en $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Calculer le temps mis par le projectile à parcourir le canon.

30. Un canon a les caractéristiques suivantes :
calibre (diamètre intérieur de l'âme), 75 mm ;
longueur de l'âme, 2,5 mètres ;
poids du projectile, 7,2 kg ;
vitesse à la sortie, 530 mètres par seconde.

On suppose que, pendant le parcours du projectile dans la pièce, la combustion de la poudre maintienne constante la pression du gaz et on négligera les frottements. Déterminer :

1° l'énergie cinétique du projectile à la sortie (en kgm et en joules) ;
2° la force qui agit sur le projectile pendant son parcours (en kg et en dynes) ;
3° la pression du gaz en atmosphères et en kg/cm² ;
4° le mouvement à l'intérieur du canon et l'accélération ;
5° le temps de parcours de l'âme. (*St Cyr.*)

31. Un mobile se déplace sur une droite horizontale et il est simplement soumis à une force résistante proportionnelle à la vitesse $F = \lambda mv$. Ce mobile est lancé avec une vitesse initiale de 2 mètres par seconde ; on constate qu'il parcourt une longueur totale de 100 mètres. Trouver la valeur du coefficient λ.

Calculer au bout de combien de temps le mobile a parcouru 99 mètres. Déterminer et représenter graphiquement la loi du mouvement et la loi de la vitesse.

32. Etudier le mouvement rectiligne d'un mobile avec une résistance $F = mk\sqrt{v}$.

33. Etudier le mouvement rectiligne d'un mobile sous l'action d'une attraction proportionnelle à l'inverse du carré de la distance à un point fixe.

34. Sur une droite AB un point se déplace sous l'action de l'attraction d'un point fixe A, attraction proportionnelle à la distance, et de la répulsion d'un point fixe B, répulsion proportionnelle à la distance. Y a-t-il des positions d'équilibre stable ou instable ?

35. Un point *libre* reste sur un arc de cercle de centre O sous l'action d'une force parallèle à Oy. On donne v_0. Déterminer la force et la loi du mouvement, en supposant l'abscisse initiale nulle.

36. Un plan incliné rugueux a 1 km de longueur et une pente de 1/100. Un mobile met trois minutes pour descendre en glissant sans vitesse initiale. Trouver le coefficient de frottement.

37. Suivant quelle droite faut-il faire descendre dans le vide un mobile pesant pour lui faire atteindre dans un temps minimum une droite BC ? On suppose que le mobile part sans vitesse d'un point O, que le point B est sur l'horizontale de O à 1 mètre de O, que le point C est sur la verticale de O, à 1 mètre en dessous de O.

38. Un centre de forces C se déplace sur l'axe Ox d'un mouvement uniforme dont la vitesse est égale à l'unité. Le centre C attire un élément matériel M de masse unité placé dans le plan xOy avec une force F dont l'intensité a pour mesure celle de la distance MC. A l'instant initial, le centre C est à l'origine O et le point M est abandonné sans vitesse en un point M_0 de coordonnées $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Déterminer le mouvement du point M. Indiquer la nature de la trajectoire. Calculer le travail de la force F quand le point M va de la position initiale M_0 à une autre position.

39. Un point M mobile dans un plan est soumis à une force attractive d'intensité $\frac{k}{r_1}$ de la part du point fixe A_1 et à une force répulsive d'intensité $\frac{k}{r_2}$ de la part du point fixe A_2 (les points A_1 et A_2 sont situés dans le plan et l'on pose $r_1 = A_1M$ et $r_2 = A_2M$). Trouver la fonction des forces. Construire les lignes de niveau et les lignes de forces.

40. Un point matériel A de masse 1 se trouve dans le champ de forces $X = \frac{y}{z}$, $Y = \frac{x}{z}$, $Z = -\frac{xy}{z^2}$; déterminer le travail pour un déplacement du point (x_0, y_0, z_0) au point (x, y, z) ; trouver les surfaces de niveau et les lignes de forces. Etudier le mouvement du point A assujetti à rester sur la droite parallèle à Oz ayant pour équations $x = 1$, $y = 2$. On supposera qu'à l'instant initial le point A se trouve avec la vitesse 2 au point $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$. Déterminer la pression du point A sur la droite trajectoire.

41. Un point matériel A de masse m est soumis à son poids ; il est en outre attiré par deux masses m_1 et m_2 placées en deux points fixes A_1 et A_2 proportionnellement aux distances et aux masses. Montrer que la résultante de ces deux forces attractives est la même que si les masses m_1 et m_2 étaient concentrées en leur centre de masse. Déterminer les surfaces de niveau et les lignes de forces. Trouver la position d'équilibre B du point A supposé libre ; trouver la surface de niveau qui passe par B. Montrer que la fonction des forces passe par un maximum en B. Enfin en supposant maintenant que le point matériel est assujetti à rester sur une droite matérielle fixe, trouver la position d'équilibre.

42. Mouvement d'un point attiré par un point fixe O proportionnellement à la distance r. On suppose que la force F a pour intensité $\frac{1}{8}mr$, que le rayon vecteur initial r_0 vaut 10^{cm} et que la vitesse initiale est $v_0 = 5$ cm/s. Trouver l'angle γ_0 que doit faire la vitesse initiale avec le rayon vecteur pour que le mobile passe par un point géométrique A_1 qui se déduit de A par une rotation d'un angle droit autour du point O. Trouver les axes de l'ellipse décrite par le point. Calculer le temps mis pour décrire l'ellipse et le temps mis pour aller de A_0 en A_1.

43. Un point décrit une cardioïde d'équation $r = a(1 + \cos\theta)$ sous l'action d'une force centrale $f(r)$, trouver la fonction $f(r)$.

44. Un point matériel A, de poids P, est maintenu par deux cordons passant sur de petites poulies B, C de même niveau (BC = 1 mètre) et supportant des poids égaux à P. On suppose que la tension des cordons est toujours égale à P et que le mobile A se déplace sur la verticale médiane. Le point A est en équilibre quand l'angle BAC est égal à 120°. On écarte le point A vers le bas d'une distance $OA_0 = 1^m,20$ (O milieu de BC) et on l'abandonne sans vitesse. Trouver la relation qui donne la vitesse en fonction de l'altitude z ; trouver la vitesse au moment du passage en O sur l'horizontale BC. Déterminer la position où le point s'arrêtera pour redescendre ; calculer le maximum de la vitesse. Donner une valeur approchée du temps mis à l'ascension (*fig.* 72).

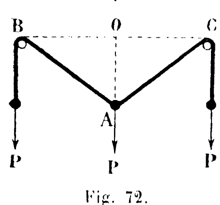


Fig. 72.

45. Equilibre et mouvement d'un anneau glissant sans frottement sur une droite inclinée à 30° sur la verticale et tournant à vitesse angulaire constante à raison de 120 tours/minute.

46. Un fil de caoutchouc de 50^{cm} de longueur est attaché en B et en C sur une horizontale ; sa longueur naturelle est BC. Lorsqu'on l'allonge, sa tension est proportionnelle à l'allongement. On constate que si l'on suspend au milieu un poids de 250 grammes, le fil peut prendre une position d'équilibre BAC telle que le triangle BAC soit équilatéral. Trouver le mouvement quand on suspend brusquement le poids au milieu O de AB, le fil étant dans son état naturel.

47. Un point A de masse 1 gramme est soumis à l'action de la pesanteur et d'une force attractive émanant de l'origine O et de valeur absolue $g\frac{r}{2}$ dynes,

r désignant la distance OA en centimètres. Trouver la valeur du travail quand le mobile passe d'un point à un autre. On supposera ensuite que le point se déplace sans frottement sur la surface matérielle d'un paraboloïde situé en dessous du plan xOy et d'équation $2z = x^2 + y^2$; trouver la position d'équilibre et déterminer le mouvement; étudier en particulier les deux cas où on place le mobile en un point de cote $z = +2^{cm}$ avec une vitesse initiale dirigée soit suivant le méridien soit suivant le parallèle et égale à $v_0 = 7 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

48. Un cylindre homogène de densité inférieure à 1 et de 10^{cm} de hauteur touche par sa base la surface de l'eau d'un large bassin ; on l'abandonne à lui-même. Déterminer la longueur de son enfoncement maximum et la durée des oscillations de son mouvement. On examinera successivement les deux cas suivants : 1° la densité du cylindre est 0,4 ; 2° la densité du cylindre est 0,9. On supposera que g mètres $= \pi^2$ et on tiendra compte de la poussée d'Archimède en négligeant la résistance offerte par l'eau à l'avancement ; on traitera le cylindre comme un point matériel qui aurait même masse et serait soumis au poids et à une force égale à la poussée d'Archimède.

49. Mouvement d'un point pesant sur une cycloïde, d'axe vertical, dont la concavité est tournée vers le haut.

50. Un corps pesant de poids $P = mg$ glisse avec frottement de coefficient donné sur un plan incliné qui fait l'angle i avec le plan horizontal. Il est lié à un ressort fixé en un point de la partie supérieure du plan et constamment parallèle à une ligne de plus grande pente. Etudier l'équilibre et le mouvement du corps en supposant que sa vitesse initiale soit parallèle à la direction du ressort. On supposera que la force exercée par le ressort est proportionnelle à son allongement.

51. Un point pesant A de masse 4 est assujetti à glisser sans frottement sur une droite faisant 30° avec l'horizon ; il est attiré par un point O de cette droite proportionnellement à la distance $r = OA$, la force ayant pour valeur absolue $16r$. Trouver le mouvement en supposant qu'à l'instant initial le mobile se trouve au point O sans vitesse.

52. L'axe Oz étant dirigé verticalement vers le haut, un point matériel de poids 2 kg est assujetti à se déplacer sur la surface matérielle d'équation

$$z - 5 \text{ arc tg} \frac{y}{x} = 0 ;$$

ce point est soumis à son poids et à une force F parallèle au plan xOy. Comment doit-on choisir cette force pour que le point soit en équilibre en un point quelconque de la surface ? Où faut-il placer le point matériel pour que la pression normale soit de 3 kgs ? Quel est le travail de la force F pour un déplacement du point sur la surface ?

53. Etudier le mouvement dans le vide d'un point matériel pesant abandonné sans vitesse initiale, en tenant compte du mouvement de la Terre.

54. Etudier le mouvement dans le vide d'un projectile en tenant compte du mouvement de la Terre.

55. Etudier le mouvement d'un point matériel pesant assujetti à rester sur une circonférence qui tourne autour d'un diamètre vertical avec une vitesse angulaire constante. On considérera le mouvement relatif par rapport au plan mobile. On cherchera les positions d'équilibre.

Dynamique des systèmes.

(Chapitres XI, XII, XIII et XIV.)

56. Trouver le centre de masse : 1° d'un arc homogène de chaînette ; 2° d'un arc homogène d'hélice.

Trouver le centre de masse : 1° d'une zone sphérique homogène ; 2° de la surface homogène d'une calotte de paraboloïde de révolution limitée par un plan perpendiculaire à l'axe et passant par le foyer ; 3° de la surface homogène d'une demi-ellipse.

Trouver le centre de masse : 1° d'un segment de paraboloïde homogène de révolution limité par un plan perpendiculaire à l'axe ; 2° d'un demi-tore homogène limité par le plan de l'équateur.

57. Déterminer le moment d'inertie d'une plaque homogène ayant la forme d'un rectangle, par rapport à une diagonale.

58. Déterminer l'ellipsoïde d'inertie d'un ellipsoïde homogène.

59. Calculer le moment d'inertie d'un cône de révolution homogène par rapport à son axe, puis par rapport à une droite passant par son sommet et perpendiculaire à son axe. Déterminer les axes de l'ellipsoïde central d'inertie. Trouver la condition pour que l'ellipsoïde central d'inertie soit une sphère. Application : le cône a un rayon de base 10^{cm}, une hauteur 20^{cm}, une masse totale de 1 000 grammes ; il est suspendu par une arête ; trouver la durée des petites oscillations ; trouver la durée des oscillations qui donnent un écart angulaire maximum de 6 degrés.

60. Une voiture automotrice de tramway est portée par quatre essieux et chacun de ces essieux est actionné par un moteur électrique grâce à l'intermédiaire d'un engrenage. On donne : 1° le poids total de la voiture, des roues et des moteurs, soit $P = 30\,000$ kg ; 2° le poids de chaque essieu, y compris les roues et les engrenages qu'il porte, soit $P_1 = 800$ kg ; 3° le rayon des roues $R_1 = 0{,}4$ m et leur rayon de gyration $K_1 = 0{,}3$; 4° le poids de chaque moteur $P_2 = 1\,000$ kg et son rayon de gyration $K_2 = 0{,}15$ m. On sait que chaque engrenage réduit la vitesse de son moteur dans le rapport de 4 à 1. Calculer le couple qu'il faut appliquer à chaque moteur pour donner à la voiture un mouvement uniformément accéléré d'accélération $\gamma = 0{,}2 \dfrac{m}{s^2}$, la résistance à la traction étant égale à 10 kg par tonne. Déterminer la vitesse, le chemin parcouru et l'énergie cinétique au bout de 20 secondes.

61. Une plaque homogène de poids P repose horizontalement d'une part sur un support A, d'autre part sur une roue dentée B qui engrène avec une crémaillère fixée à cette plaque ; on donne le poids P_1 de la roue, son rayon

R_1, son rayon de gyration k_1 et la distance l du support au point de contact de la crémaillère avec la roue. Celle-ci étant soumise à un couple constant, tendant à faire mouvoir la plaque dans le sens allant du support vers la roue, on demande d'étudier le mouvement du système. On suppose que la plaque glisse sur le support avec un coefficient de frottement f; à l'instant initial la plaque est en repos et son centre de gravité est au-dessus du support (*fig.* 73). (On appliquera le théorème des forces vives au système formé par l'ensemble de la plaque et de la roue.)

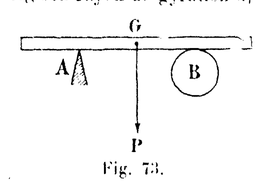
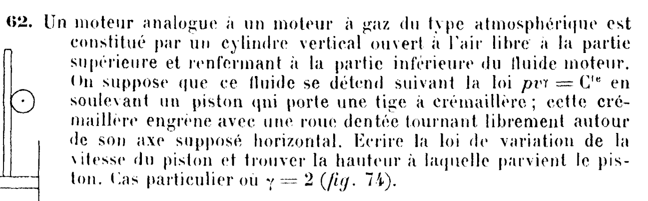


Fig. 73.

62. Un moteur analogue à un moteur à gaz du type atmosphérique est constitué par un cylindre vertical ouvert à l'air libre à la partie supérieure et renfermant à la partie inférieure du fluide moteur. On suppose que ce fluide se détend suivant la loi $pv^\gamma = C^{te}$ en soulevant un piston qui porte une tige à crémaillère; cette crémaillère engrène avec une roue dentée tournant librement autour de son axe supposé horizontal. Ecrire la loi de variation de la vitesse du piston et trouver la hauteur à laquelle parvient le piston. Cas particulier où $\gamma = 2$ (*fig.* 74).


Fig. 74.

63. Un volant de poids $P = 500$ kg, de rayon extérieur $R = 1$ m, de rayon de gyration $K = 0,8$ m, est soumis à l'action d'un couple moteur constant de moment $C = 10$ kgm. A un instant où la vitesse est de $n = 300$ tours/minute, on fait agir sur la jante du volant un frein dont le coefficient de frottement est $f = 0,2$. 1° En supposant que la pression Q du frein soit constante, déterminer cette pression de façon que le volant s'arrête au bout de $n_1 = 100$ tours. 2° En supposant que la pression du frein varie proportionnellement au temps et soit égale à At, déterminer le coefficient A de façon que le volant s'arrête au bout de 10 secondes; calculer le nombre de tours qu'il a alors effectués.

64. Un wagon est lancé sur une voie rectiligne horizontale avec une vitesse initiale v_0 : trouver le chemin qu'il parcourt jusqu'à son arrêt, sachant que l'ensemble des résistances qu'il éprouve est une fraction donnée de son poids. On désignera par P le poids total du wagon, roues comprises, par P_1 le poids total des quatre roues identiques, par R_1 le rayon des roues et par k_1 le rayon de gyration des roues.

65. Un disque homogène de rayon R tourne autour d'un axe horizontal Oz perpendiculaire à son plan et passant par son centre. Un point P de la circonférence est attiré par un point A situé sur la verticale de $A(OA = a)$ suivant une force d'intensité $k.PA$. Démontrer que le mouvement est synchrone au mouvement d'un pendule simple de direction OP ; on calculera la longueur λ de ce pendule simple. En supposant que, quand OP est horizontal, l'attraction est égale au poids, calculer la variation de λ en fonction de a. (*Mathématiques générales, Clermont.*)

66. Une barre homogène de masse M, de longueur l, tourne dans un plan xOy autour de l'une de ses extrémités placée en O. La barre, non pesante, est soumise à l'influence d'un champ de forces. La force du champ exercée sur un

élément de la barre de longueur infiniment petite, de coordonnées (x, y) et de masse infiniment petite m, a pour composantes $X = my$, $Y = mx$. 1° La barre étant dans une position quelconque définie par l'angle θ qu'elle forme avec Ox, montrer que l'action du champ peut être réduite à une force unique. Trouver les composantes de cette force sur les axes et les coordonnées de son point d'application. Déterminer les positions d'équilibre de la barre.

On abandonne la barre sans vitesse initiale sur la portion positive de Ox. Trouver une équation permettant de déterminer en fonction du temps l'angle θ que forme la barre avec Ox. Calculer la vitesse angulaire de la barre en fonction de θ ; indiquer l'allure et les limites du mouvement de rotation. (*Mathématiques générales, Nancy.*)

67. Etude du mouvement d'une barre homogène pesante de longueur l et de poids P dont les deux extrémités A et B sont assujetties à rester sans frottement sur deux axes rectangulaires Ox horizontal et Oz vertical dirigé vers le haut. Evaluer l'énergie cinétique de la barre en fonction de l'angle φ que fait OG avec l'horizontale. Examiner les cas suivants : 1° la barre est en dessous du plan horizontal et s'écarte très peu de la verticale ; durée des petites oscillations ; 2° la barre est confondue avec la verticale vers le haut et soumise à une très petite vitesse initiale ; elle glisse et tombe sur le plan horizontal ; quelle est la vitesse de l'extrémité B quand elle arrive en O ? 3° l'extrémité B de la barre peut s'écarter de la verticale Oz (liaison unilatérale); trouver la réaction et chercher dans quelle condition la barre cesse de s'appuyer sur la verticale Oz ; 4° la barre est en dessous et le plan horizontal tourne autour de Oz avec une vitesse angulaire constante ω ; trouver la position d'équilibre.

68. Un treuil est constitué par un cylindre homogène de rayon 0,20 m et de poids $Q = 60$ kg ; il tourne autour de son axe supposé horizontal. Sur ce treuil est enroulée une corde de masse négligeable, tombant verticalement et supportant un poids $P = 20^{kg}$. Le système, d'abord au repos, est abandonné à lui-même. Trouver la vitesse acquise par le poids P lorsqu'il sera descendu de 5 mètres.

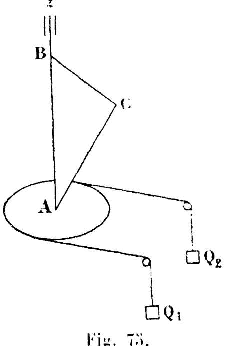


Fig. 75.

69. Sur un treuil à axe horizontal est enroulée une corde de poids négligeable supportant un poids Q qui tombe verticalement. Le treuil porte des ailettes qui éprouvent une résistance de la part de l'air ; étudier le mouvement lorsque cette résistance est proportionnelle à la vitesse et lorsqu'elle est proportionnelle à son carré ; le système est supposé partir du repos.

70. Une plaque homogène pesante de poids P a la forme d'un triangle rectangle isocèle ABC tel que $AB = BC = a$; cette plaque tourne autour du côté AB supposé vertical, la pointe A tournée vers le bas servant de pivot ; la plaque est maintenue par un manchon placé près du point B (*fig.* 75). A cette plaque est fixée une roue horizontale de centre A, de rayon R', de rayon de gyration k' et de poids P' ; sur cette roue passe sans glisser un cordon de poids négligeable dont les brins horizontaux et parallèles passent sur deux petites poulies de renvoi, d'influence négligeable, et supportent deux poids

Q_1 et Q_2 tombant verticalement. Etudier le mouvement du système ; calculer les tensions des brins du cordon et les pressions s'exerçant sur le pivot et sur le manchon.

71. Un corps solide de poids P glisse avec frottement le long d'une ligne de plus grande pente d'un plan incliné faisant avec l'horizon un angle donné *i*. A ce corps est attaché un câble de poids négligeable s'enroulant sur un treuil horizontal placé à la partie supérieure du plan incliné ; on donne le poids du treuil, son rayon R et son rayon de gyration K. Déterminer le mouvement du système sachant que le treuil est soumis à un couple moteur constant de moment C, faisant remonter le corps sur le plan incliné. Quelle est la tension T du câble ? (On coupera le câble à ses deux extrémités, quitte à appliquer au point d'attache du treuil une force tangente au treuil et d'intensité T et au point d'attache du corps une force dirigée suivant le câble et d'intensité T (*fig.* 76) ; on étudiera alors séparément le mouvement du treuil et le mouvement du corps, puis on éliminera T.)

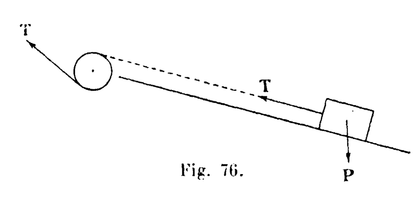


Fig. 76.

Statique.

(Chapitre XV.)

72. Une barre AB de poids P = 1 kg et de longueur $l = 0^m,30$ est supportée par un fil de caoutchouc de longueur naturelle $l = 0^m,50$. Le fil est suspendu à un crochet C ; il s'allonge proportionnellement à la tension et une tension de 1 kg produit un allongement $l' = l$. Trouver l'angle x que fait le fil avec l'horizontale (*fig.* 77).

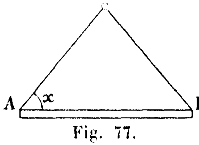


Fig. 77.

73. Un bateau suit le milieu du canal ; il est tiré par deux chevaux placés respectivement sur un chemin de halage et sur l'autre ; chaque cheval tire avec une force de 100 kg. La première corde fait 20° avec la direction du canal ; trouver la direction de la 2ᵉ corde et l'effort utile total.

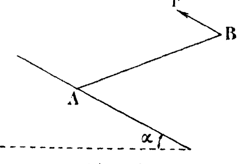


Fig. 78.

74. Sur un plan qui est incliné suivant un angle de 36° repose sans frottement une barre AB de poids P = 10 kg. Cette barre est maintenue par une force parallèle aux lignes de plus grande pente du plan et appliquée en B. Trouver la position d'équilibre et la force F (*fig.* 78).

75. Equilibre d'une barre pesante AB dans un plan tournant autour d'un axe vertical Ox avec une vitesse angulaire constante ω, les points A et B étant assujettis à rester respectivement sur Ox et sur Oy (*fig.* 79).

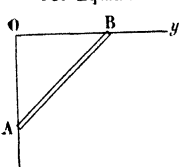
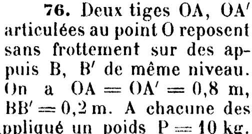


Fig. 79.



76. Deux tiges OA, OA′ articulées au point O reposent sans frottement sur des appuis B, B′ de même niveau. On a $OA = OA' = 0{,}8$ m, $BB' = 0{,}2$ m. A chacune des extrémités A et A′ est appliqué un poids $P = 10$ kg. Trouver la position d'équilibre (*fig.* 80).

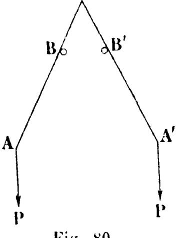


Fig. 80.

77. Une barre homogène $OA = 0{,}30$ m, de poids $P = 5$ kg, repose sur un cercle vertical de rayon $R = 0{,}10$, de poids $P' = 10$ kg, placé sur un plan horizontal qu'il touche en B et retenu par une corde OD attachée en O et en D sur OC. On donne l'inclinaison de la barre en imposant $OB = 20$ cm. Calculer la tension T de la corde et les réactions (*fig.* 81).

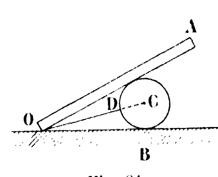


Fig. 81.

78. Sur un plan incliné repose un cône homogène de rayon $r = 8$ cm, de hauteur $h = 40$ cm et de poids $P = 10$ kg. 1° Le plan est rugueux ; quelle inclinaison maximum peut-on donner au plan pour que le cône ne tombe pas ? 2° Dans cette position on supprime le frottement ; quelle force horizontale H doit-on appliquer en un point de l'arête SA (*fig.* 82) pour que le cône ne glisse pas et dans quelle région doit-on appliquer la force H pour que le cône ne tombe pas ?

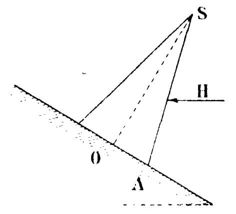


Fig. 82.

79. Equilibre d'une table pesante reposant par quatre pieds égaux de façon que les enfoncements des pieds dans le sol soient proportionnels aux pressions exercées.

80. Une poutre de poids négligeable repose sur deux appuis O et A, une autre poutre de poids négligeable repose sur un appui C et supporte en B un poids P. En quel point faut-il appuyer la deuxième poutre sur la première pour que la réaction en A soit égale à P ? Calculer les autres réactions. Application numérique : $P = 100$ kg, $OA = a = 1$ m, $AB = b = 1$ m, $BC = c = 0{,}5$ m (*fig.* 83).

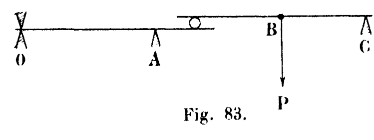


Fig. 83.

81. Une barre homogène qui pèse 1 kg par décimètre a la forme d'une équerre de côtés $OA = 1$ m et $OB = 0,5$ m. Elle est suspendue en O. Trouver l'inclinaison qu'elle prend naturellement (*fig.* 84). Calculer la force horizontale H qu'il faut appliquer à l'extrémité A pour que les deux branches de la barre soient également inclinées sur l'horizontale.

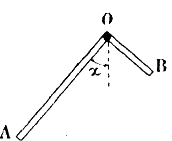


Fig. 84.

82. Au centre d'un plateau circulaire de poids négligeable est un poids de 60 kg ; déterminer les trois points A, B, C de la circonférence par lesquels on doit suspendre le plateau pour le maintenir horizontal avec des forces de liaison proportionnelles aux nombres 3, 4, 5.

83. Un treuil (*fig.* 85) est constitué par un cylindre de rayon $r = 20$ cm dont l'axe repose sur deux appuis A et B et par une roue de rayon $R = 80$ cm et de centre C. Ce treuil est actionné par un pignon de centre D, de rayon $r_1 = 10$ cm, mu par une manivelle E de rayon $R_1 = 50$ cm ; le point D est situé sur la verticale de C. Le poids propre du treuil est $P = 100$ kg. Une corde enroulée sur le cylindre dans le plan vertical du point G, centre de gravité du treuil, supporte un poids $Q = 400$ kg. Les distances AG, GB, BC ont pour valeurs $AG = 60$ cm, $GB = 40$ cm, $BC = 25$ cm. 1° Calculer la force F qu'il faut appliquer sur la manivelle pour maintenir l'équilibre ; 2° Calculer les réactions sur les appuis en A et B.

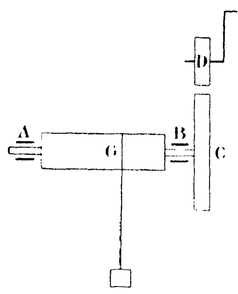


Fig. 85.

84. Une porte rectangulaire OABC (*fig.* 86) tourne autour d'un axe vertical Oz confondu avec OA et est maintenue en O par une articulation et en A par un manchon : les dimensions sont $OA = 2$ m, $AB = 90$ cm : le poids P appliqué au centre du rectangle est $P = 40$ kg. La porte est d'abord dans le plan xOz ; elle est ensuite écartée grâce à une force $F = 12$ kg appliquée normalement à la porte au milieu D du côté BC.

La porte est retenue par un ressort HK attaché d'une part en un point H du côté supérieur de la porte, tel que $AH = 60$ cm, d'autre part en un point K où vient se placer H quand la porte est au repos. La tension du ressort est proportionnelle à HK ; sa valeur est $\lambda.HK$ où HK est exprimé en mètres et λ en kilogrammes par mètre. 1° Calculer le coefficient λ sachant que la force F maintient la porte en équilibre lorsque l'angle d'ouverture HAOK est égal à 60° ; 2° calculer alors les réactions des appuis O et A.

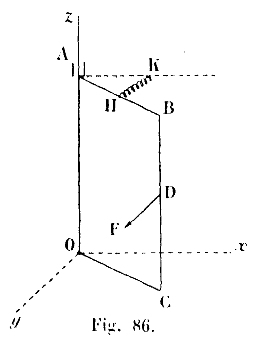


Fig. 86.

85. Balance à contrepoids constant. — Sur un cercle de rayon r (*fig.* 87) mobile dans un plan vertical autour de son centre O est enroulé un fil supportant à son extrémité un poids P ; sur une développante BDC de ce cercle passe un autre fil quittant la développante en D et supportant à son extrémité un contrepoids constant Q. Quelle est la position d'équilibre du système ? Quel est le lieu du centre du contrepoids Q quand P varie ? (*fig.* 87).

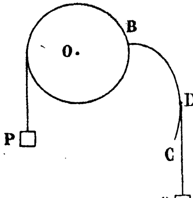


Fig. 87.

86. Trouver la position d'équilibre d'un système de deux tiges homogènes pesantes : la première, OA, de longueur $2a$ et de poids P est articulée à un support fixe à son extrémité O ; l'autre, AB, de longueur $2b$ et de poids Q, est articulée à la première en A et est soumise à son extrémité B à une force horizontale d'intensité donnée F (*fig.* 88).

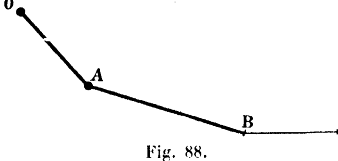


Fig. 88.

87. Une tige homogène pesante OA de longueur $2l$ et de poids P repose par une de ses extrémités O sur un sol horizontal rugueux, le coefficient de frottement étant f ; cette tige est soumise à l'autre extrémité A à une force F de grandeur et de direction données. Chercher les conditions d'équilibre.

88. Equilibre d'une barre homogène pesante s'appuyant sur un sol horizontal et sur un mur vertical rugueux.

89. Une tige pesante AB s'appuie avec frottement de même coefficient f d'une part en A contre un mur vertical, d'autre part en C sur un cylindre horizontal parallèle au mur (*fig.* 89). Chercher en quels points on doit appliquer à la tige une surcharge donnée pour qu'elle soit en équilibre.

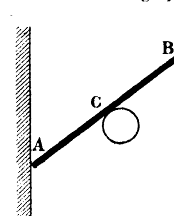


Fig. 89.

90. On considère dans un plan vertical un système formé de deux tiges pesantes : l'une est une manivelle OA tournant autour d'un point O, l'autre est une bielle AB articulée en A à la bielle ; son extrémité B glisse avec frottement sur une droite horizontale passant par le point O. Déterminer les conditions d'équilibre de ce système.

91. Une tige horizontale $x'Ox$ tourne avec une vitesse constante ω autour d'un axe vertical Oz passant par un de ses points O. Sur cette tige glissent deux anneaux A et A′ de même poids P constamment symétriques par rapport au point O et reliés l'un à l'autre par un ressort de masse négligeable. Ce ressort à l'état naturel a une longueur $2l$ et lorsqu'il est soumis à ses extrémités à des tensions T, il subit un allongement $2x$ tel que l'on ait $T = k\frac{x}{l}$.

On demande la position d'équilibre des anneaux, en supposant qu'il n'y ait pas de frottement. — En admettant ensuite qu'il y ait frottement des anneaux sur la tige $x'Ox$, avec un coefficient f, chercher quelle variation on peut donner à la vitesse angulaire sans que l'équilibre soit rompu ; application numérique : $P = 0{,}5$ kg, $l = 0{,}2$ m, $k = 50$.

92. Déterminer les positions d'équilibre d'un anneau pesant mobile avec frottement sur une droite tournant avec une vitesse angulaire constante autour d'un axe vertical qui rencontre cette droite.

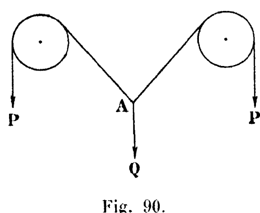


Fig. 90.

93. Un câble de poids négligeable passe sur deux cylindres horizontaux égaux, dont les axes sont parallèles et de même niveau. Il porte à chacune de ses extrémités un poids P et au milieu de la portion située entre les deux cylindres un poids Q (*fig.* 90). On demande de déterminer la position d'équilibre en supposant qu'il n'y ait pas de frottement.

94. Etudier le problème du pendule composé, avec calcul des forces de liaison, en employant la méthode de d'Alembert.

Chocs et percussions.

(Chapitre XVI.)

95. Deux sphères très petites de masses m et m' sont assimilables à deux points matériels et se meuvent en sens inverses sur une même droite. Elles se rencontrent à un instant où leurs vitesses respectives sont v et v'. On demande : 1° de déterminer la vitesse prise par l'ensemble des deux sphères que l'on suppose rester solidaires après le choc ; 2° de calculer, dans l'hypothèse où les sphères se séparent après le choc, les vitesses des sphères aussitôt après le choc, en supposant que l'énergie cinétique de l'ensemble des deux sphères n'a pas varié.

96. Une tige homogène OA de longueur l et de masse M est mobile autour de l'une de ses extrémités O supposée fixe ; elle occupe d'abord une position horizontale où elle est abandonnée sans vitesse angulaire initiale ; lorsque la tige a atteint la position verticale, son extrémité A frappe normalement un corps B de petites dimensions et de masse M_1, posé sur un appui. Déterminer le mouvement que prennent les deux corps aussitôt après le choc : 1° en supposant qu'ils soient parfaitement élastiques, c'est-à-dire que l'énergie cinétique de l'ensemble des deux corps n'est pas modifiée par le choc ; 2° en supposant que les deux corps se comportent comme deux corps mous, c'est-à-dire que les deux corps restent solidaires après le choc.

97. Une plaque d'épaisseur négligeable est mobile autour d'un axe situé dans son plan. La plaque étant en repos on exerce sur elle une percussion en un point C (par exemple en utilisant un projectile). Chercher les conditions que doit remplir la percussion pour que l'axe de suspension ne supporte aucune

percussion, c'est-à-dire pour que les forces de liaison ne soient pas modifiées pendant le choc.

98. Appliquer le problème précédent au cas particulier suivant : la plaque est constituée par un cercle homogène solidaire d'une tige située dans le prolongement d'un rayon. En désignant par M la masse du cercle, par R le rayon du cercle, par μ la masse d'un mètre de tige, on calculera notamment la longueur que doit avoir la tige pour qu'une percussion normale puisse être appliquée au centre du cercle sans que les forces de liaison soient modifiées.

99. Un prisme homogène a un mouvement de translation parallèle à un plan horizontal sur lequel il repose par une de ses faces ; la direction de son mouvement est normale à l'une de ses faces verticales. A un instant où sa vitesse est v, il vient choquer un obstacle rectiligne fixe placé dans le plan horizontal perpendiculairement à la direction du mouvement. Chercher si le prisme basculera autour de l'obstacle après le choc.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE IV. — **Cinématique des systèmes invariables.**

CHAPITRE V. — **Composition des mouvements.**

CHAPITRE VI. — **Principes de la dynamique. Travail.**

CHAPITRE VII. — **Dynamique du point matériel. Théorèmes généraux.**

CHAPITRE VIII. — **Problèmes de la dynamique du point matériel libre.**

CHAPITRE IX. — Équilibre et mouvement d'un point matériel soumis à des liaisons.

CHAPITRE X. — Mouvements relatifs d'un point matériel.

CHAPITRE XI. — Centres de masse. Moments d'inertie.

CHAPITRE XII. — Dynamique des systèmes. Théorèmes généraux.

Chapitre XIII. — **Mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe.**

Chapitre XIV. — **Problèmes sur le mouvement des systèmes.**

Chapitre XV. — **Statique.**

Chapitre XVI. — **Notions sur les chocs et percussions.**

CHARTRES. — IMPRIMERIE DURAND, RUE FULBERT.